endbook.net

!!! فیزیک ۱ !!!

!!! استاد غفاری !!!

اگر جایی از جزوه ناخوانا بود بگید بهتون بگم :)

بابت خط هم شرمنده :(

Telegram → @srshe

Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

«فصل ۱»

«کار و انرژی جنبشی»

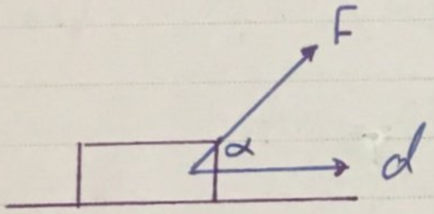
$\vec{F}$ — برداری / لحظه‌ای

$\vec{F} = m.\vec{a}$ — برداری / لحظه‌ای

W کار — نرده‌ای / در کل یک بازه‌ای

؟ — نرده‌ای / بازه‌ای

کار کمیتی است بازه‌ای و نرده‌ای و همان توان منزی حل مسائل را دارد که با همان ویژگی‌های نیرو و مسئله را حل می‌کنند.



«کار نیروی ثابت در مسیر مستقیم»

«$W_F = N.m = J$»

کار نیروی $\vec{F}$ در جابه‌جایی $\vec{d}$ ← $W_F = Fd\cos\alpha$ → زاویه‌ی بین d , F

بزرگی نیرو (N) ← | → بزرگی جابه‌جایی‌ها (m)

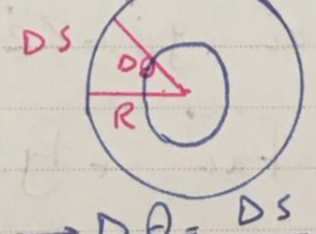
«$W_F = Fd\cos\alpha = \vec{F}\cdot\vec{d} = F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z$»

* مثال: چرا رادیان جزو واحدهای پایه.

واحد زاویه در دستگاه SI ← رادیان می‌باشه

رادیان در دستگاه SI ← جزو واحدها نیست

$\frac{\cancel{\text{طول}}\ 2\pi R}{\cancel{\text{طول}}\ R} = 2\pi\ rad$



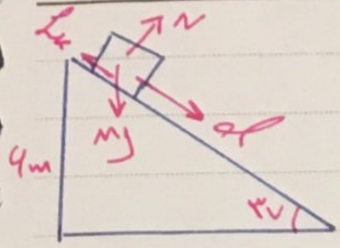
«$DS = RD\theta \rightarrow D\theta = \frac{DS}{R}$»

مثال: جسمی به جرم 2kg از بالای سطح شیب‌دار به ارتفاع 4m با سرعت اولیه $2\sqrt{5}\ m/s$ به طرف پایین شروع به حرکت می‌کند. کار هر یک از نیروها از لحظه‌ی شروع حرکت تا رسیدن به پایین حساب کنید.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$m = 2\,kg$

$h = 6\,m$

$V_0 = \sqrt{56}$

$\mu_k = 0.2$

کار انرژی دادن

$* \; W_{mg} = mg\,d\cos 53 = 2\times 10\times 10\times \frac{6}{10} = +120\,J$

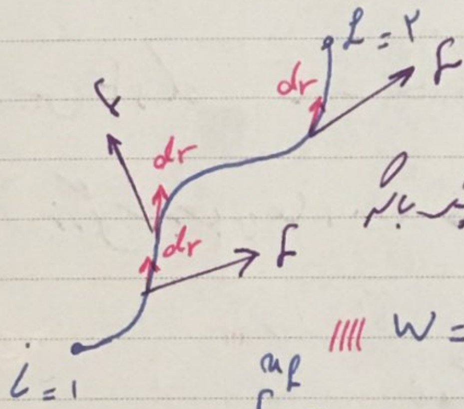
$* \; W_{f_k} = f_k\,d\cos 180 = \mu_k(mg\cos 37)\times d\times(-1) = \frac{2}{10}\times 2\times 10\times \frac{8}{10}\times 10\times -1 = -32\,J$

$* \; W_N = N\,d\cos 90 = 0$ — انرژی گرفته نشان دهنده‌ی منفی

$W_{mg} + W_{f_k} + W_N = K_2 - K_1 \longrightarrow 120 + 0 - 32 = \frac{1}{2}\times 2\times V_2^2 - \frac{1}{2}\times 2\times(\sqrt{56})^2$

$\Rightarrow 88 = V_2^2 - 56 \longrightarrow V_2^2 = 144 \longrightarrow \boxed{V_2 = 12\,m/s}$

/// کار نیروی متغیر در مسیر خمیده ///



dr = اگر جابجایی کوچک باشد (همان جابجایی)

//// $W = \int dw = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}\cdot dr$

$= \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx + \int_{x_i}^{x_f} F_y\,dy + \int_{x_i}^{x_f} F_z\,dz$ ///

$r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \longrightarrow dr = dx\,i + dy\,j + dz\,\vec{k}$

$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

endbook.net

PAPCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

"کار نیروی متغیر یک بعدی"

$$w=\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$ → اندیس نیست

اندیس است

نیروی فنر یک متغیر یک بعدی است

مثال: مکعبی به جرم 2kg بر روی سطح افقی با سرعت $\sqrt{34}\ m/s$ به فنری با ثابت $k=400\ N/m$ برخورد کرده و آن را متراکم می‌کند. کار هر یک از نیروهای وارد بر جسم را از لحظه برخورد با فنر تا هنگامی که فنر 20cm متراکم می‌گردد را بدست آورید.

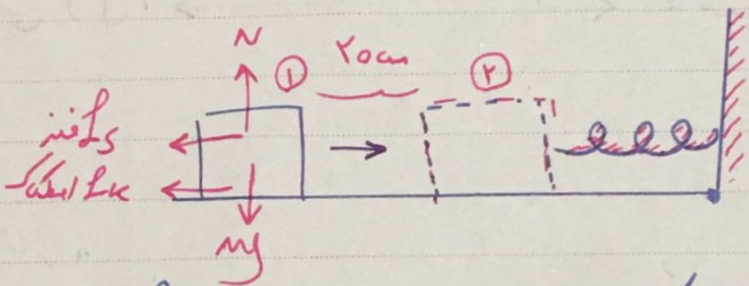
$V_0=\sqrt{34}$

$m=2kg$

$k=400$

$d=0.2m$

$\mu_k=0.25$



* $w_{mg}=mg\,d\cos 90=0$ * $w_N=Nd\cos 90=0$

* $w_{f_k}=f_k d\cos 180=\mu_k(mg)d\times(-1)=\frac{25}{100}\times 2\times 10\times\frac{2}{10}\times -1=\boxed{-1J}$

* $w_{f_s}=\int_{x_i}^{x_f}F\,dx=\int_{x_i}^{x_f}-kx\,dx=-k\int_{x_i}^{x_f}x\,dx$

$$w_{f_s}=-k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_i}^{x_f}=-k\left[\frac{x_f^2}{2}-\frac{x_i^2}{2}\right]=-400\left[\frac{(0.2)^2}{2}\right]=\boxed{-8J}$$

* $\underbrace{w_{mg}}_{0}+\underbrace{w_N}_{0}+w_{f_k}+w_{f_s}=k_2-k_1$

$$(-1)+(-8)=\frac{1}{2}\times 2\times v_2^2-\frac{1}{2}\times 2\times(\sqrt{34})^2$$

$$v_2^2=34-9=25 \longrightarrow v_2^2=25\ m/s \longrightarrow \boxed{v_2=5\ m/s}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

«قضیه ی کار و انرژی جنبشی»

$$\vec{F} = m.\underbrace{\vec{a}}_{\frac{dv}{dt}} = m.\frac{dv}{dt}$$

$$\int \vec{F}.\vec{dr} = \int m\frac{dv}{dt}.\vec{dr} \longrightarrow m\int v.dv = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{v_1}^{v_2}$$

ضرب داخلی

$$\frac{dr}{dt} = v$$

$$= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1$$

$$W_T = \Delta K$$

کار برآیند نیروهای وارد بر جسم ← یا مجموع همه ی کارهای نیروها

تغییر انرژی جنبشی (J)

«توان»

$$\bar{P} = \frac{W}{t} \quad \frac{J}{s}$$

→ وات W → ژول/ثانیه

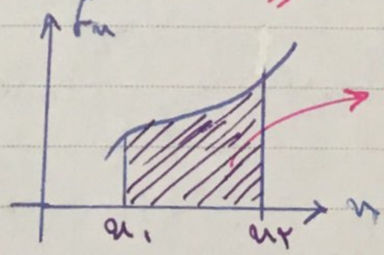
«سرعت انجام کار»

«کار انجام شده در واحد زمان»

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{F.dr}{dt} = F.v = «Fv\cos\theta»$$

توان لحظه‌ای

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx$$



W = کار

endbook.net

Subject: Year. Month. Date. ( )

PAPCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

«انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی»

«$F = m.\vec{a} \xrightarrow{\text{فصل ۷}} W = \Delta K \xrightarrow{\text{فصل ۸}}$ ؟»

انواع نیروها:

پایستار (ابقایی) «Conservative» «نیروی پانسروا تید»
← اگر کار نیروی در یک مسیر بسته برابر صفر باشه آن نیرو را گویند
مثال ← نیروی گرانش – نیروی الکتریکی – نیروی کشسانی فنر

ناپایستار (غیرابقایی) «Non conservative»
← اگر کار نیروی در یک مسیر بسته برابر صفر نباشه را گویند
← اصطکاک جنبشی ایستا – مقاومت هوا.

«انرژی پتانسیل»

$$\left.\begin{array}{l} W = -50j \\ U = +50j \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{U = -W}$$

کار نیروی وزن و انرژی ذخیره شده همیشه قرینه هم هستند

$$\underbrace{W_c}_{-\Delta U} + W_{nc} = \Delta K \Rightarrow W_{nc} = \Delta K + \Delta U$$

$$\rightarrow W_{nc} = \Delta(\underbrace{K+U}_{E}) \rightarrow \boxed{\Delta E_{mec} = W_{fk}}$$

$$* \; W_{nc} = 0 \rightarrow \Delta E_{mec} = 0 \rightarrow E_{mec} = \text{ثابت} \rightarrow E_1 = E_2$$

پایستگی انرژی مکانیکی

مثال $W_{fk} = -10j$ اصطکاک
$W_{th} = +10j$ انرژی حرارتی

فرمول پایستگی انرژی

$$\Delta E_{mec} + \Delta E_{th} + \Delta E_{int} = W$$

ΔE_{mec} ← تغییرات انرژی مکانیکی
ΔE_{th} ← تغییرات انرژی حرارتی
ΔE_{int} ← تغییرات انرژی درونی (داخلی)
W ← کار نیروهای خارجی

PAPCO

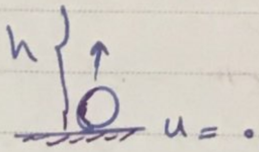
Scanned by CamScanner

endbook.net

«انرژی پتانسیل گرانشی»

$$W_c = -\Delta U \longrightarrow \Delta U = -W_c$$

$$= -(mgh\underbrace{\cos 180}_{-1}) = mgh$$



$$U - U_0 = mgh \longrightarrow \boxed{U = mgh}$$

«انرژی پتانسیل کشسانی فنر» «$U = \frac{1}{2}kx^2$»

$$W_c = -\Delta U \longrightarrow \cancel{-}\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = \cancel{-}(U_2 - U_1)$$

$$\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}k\underbrace{\cancel{x_1^2}}_{0} = U_2 - \underbrace{\cancel{U_1}}_{0} \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}kx^2}$$

«بدست آمدن نیروی پایستار با استفاده از انرژی پتانسیل»

$$\Delta U = -W_c = -\int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \quad F_y = -dU/dy, \quad F_z = -dU/dz \quad \Rightarrow \quad F_c = -\nabla U$$

پایستار

مشتق سوی - جهت - گرادیان

مثال: مشتق از x چون متغیر دیگر نداریم

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{2}k(2x) = kx$$

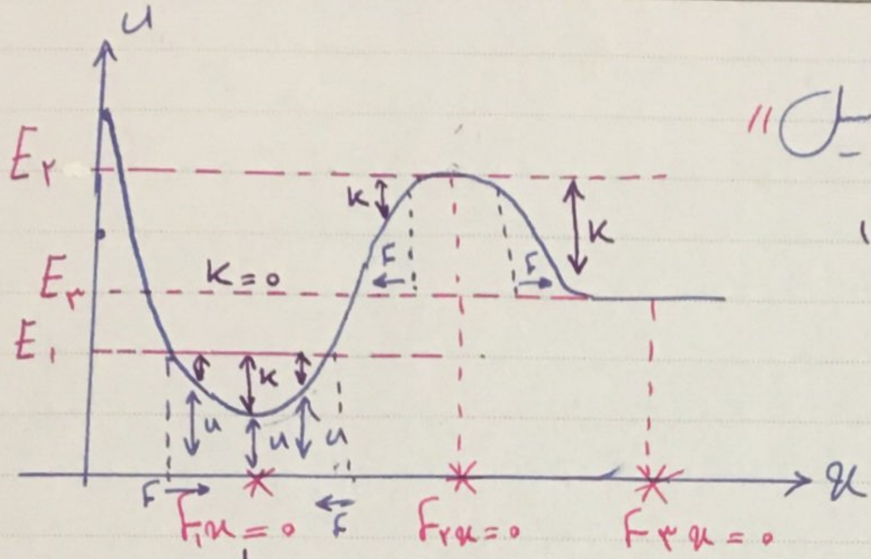
$$\boxed{F_x = -kx}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year.　Month.　Date.　( )



«بررسی منحنی انرژی پتانسیل»

* یک سطح بی اصطکاک (فقط U,K)

نیروی ناپایستار وجود نداشته باشد

$\Delta E = 0 \rightarrow E_1 = E_2$

تعادل پایدار

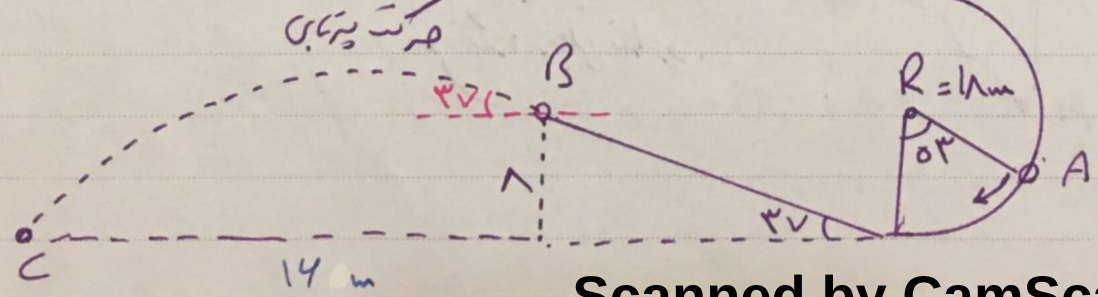
تعادل ناپایدار (شکننده)

تعادل بی تفاوت (خنثی)

* قسمتی از نمودار که $F=0$ است جسم در حال تعادل است نه در حال سکون چون امکان دارد حرکت یک نواخت داشته باشد پس در حالت تعادل است.

* در تعادل های پایدار حرکت نوسانی به وجود می آید فقط در همین حالت

مثال: مکعب بسیار کوچک به جرم m در حرکت بر مسیر دایره‌ای بدون اصطکاک به شعاع $R=1m$ هنگام عبور از نقطه‌ی A نیرویی به اندازه‌ی ۱/۶ برابر نیروی وزنش بر مسیر دایره نیرو وارد می کند پس وارد سطح شیب دار می شود و در راستای مسیر شیب دار یک حرکت پرتابی را آغاز می کند ضریب اصطکاک جنبشی بین مکعب و سطح شیب دار را به دست آورید



Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* حرکت پرتابی B و C $\quad \alpha = 37 \quad x = +16 \quad y = -8$ } مختصات B را که از داده شده

$$y = \frac{-gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha \longrightarrow -8 = \frac{-10(16)^2}{2V_0^2(\cos 37)^2} \Rightarrow \boxed{V_0 = 10}$$

نقطه B

* حرکت دایره ای $\longrightarrow \Sigma F = ma \longrightarrow N + mg\cos 53 = \frac{mv^2}{R}$

$$\longrightarrow g = \frac{v^2}{R} \longrightarrow v^2 = Rg \longrightarrow \boxed{v^2 = 180}$$ نقطه A

طبق آونگ $\Rightarrow h = L(1-\cos\theta)$

با استفاده از زاویه $= 18(1-\cos 53) \longrightarrow 18 \times 0.4 = \boxed{7.2}$ ارتفاع A

$$\Delta E_{mec} = W_{fk} \longrightarrow E_B - E_A = W_{fk}$$

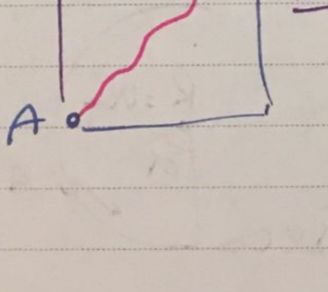
$$\frac{1}{2}m(10)^2 + m \times 10 \times 8 - \frac{1}{2}m(180) - m \times 10 \times 7.2 = \mu_k mg\cos\alpha d$$

$$\longrightarrow 50 + 80 - 90 - 72 = -8\mu_k \times d \quad \frac{40}{3} \longrightarrow \boxed{\mu_k = 0.3}$$

$$\sin 37 = \frac{8}{x} = \frac{6}{10} = \frac{40}{3} = d$$

* کار نیروی پایستار بین ۲ نقطه منحصر به فرد بوده و به مسیر طی شده بستگی ندارد.

* کار نیروی ناپایستار بین ۲ نقطه منحصر به فرد نبوده و به مسیر طی شده بستگی دارد.



$\Rightarrow$ پایستار به مسیر طی شده ربطی ندارد.

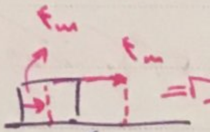
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

«فصل نهم»

«مرکز جرم و پایستگی تکانه خطی»



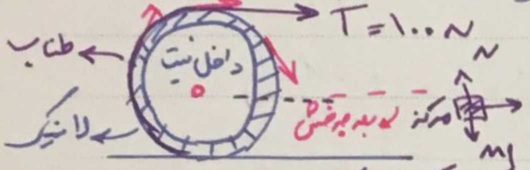
=D فرقی ندارد

یک ذره نیست

حرکت انتقالی: اگر حرکت تمام نقاط یک جسم یکسان باشد در این صورت آن حرکت را انتقالی گوییم

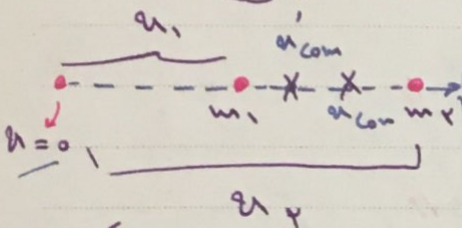
مفهوم مرکز جرم: مرکز جرم هر جسم نقطه ای است که وقتی حرکت می کند گویی تمام جرم جسم در آن نقطه قرار گرفته و همه نیروهای خارجی بر آن نقطه وارد می شود.

مرکز چوب بسیار که حرکت نمی دارد..... =D امثال ص 248 کتاب!



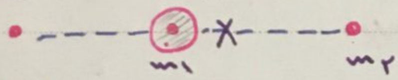
نکات: مرکز جرم یک جسم ممکن است در جسم نباشد / حرکت مرکز جرم حرکت کلی جسم را نشان می دهد

پیدا کردن مرکز جرم اجسام مختلف: (مرکز جرم ذرات گسسته یک بعدی)



$$x_{com} = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

مرکز جرم نزدیک به سنگین ترین جسم



* مرکز جرم جسم سنگین تر همیشه به قسمت سنگین تر نزدیک تر است

* مرکز جرم یک جسم همواره بین ذره های باشد / مرکز جرم چند ذره در بین آن ذرات می باشد

* مکان مرکز جرم جسم به مبدا مختصات ربطی ندارد / اگر $m_1=m_2$ باشد ← مرکز جرم $= \frac{x_1+x_2}{2}$

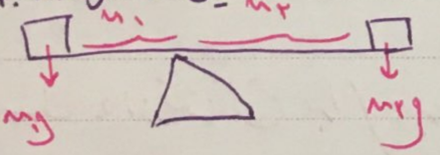
$x_{com}=0 \Rightarrow \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=0 \rightarrow m_1x_1+m_2x_2=0$

یعنی مرکز روی مرکز جسم باشد.

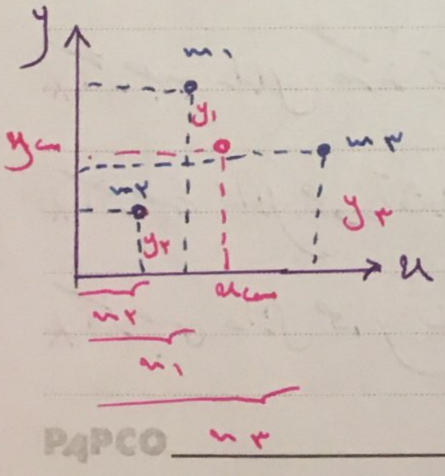
$\Rightarrow m_1x_1 = -m_2x_2$

$\Rightarrow m_1 g x_1 = -m_2 g x_2$

چون مرکز روی مرکز جرم است



$$x_{com} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$



مرکز جرم ذره ها در حالت ۲ بعدی و سه بعدی گسسته

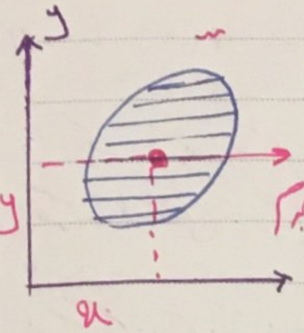
$x_{com} = \frac{\sum m_i x_i}{m_i}$ / $y_{com} = \frac{\sum m_i y_i}{m_i}$ / $z_{com} = \frac{\sum m_i z_i}{m_i}$

اگر ۳ ...

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )



«مرکز جرم جسم های پیوسته»

dm «جرم خیلی خیلی کم»

انتگرال جرم را المان جرم / دیفرانسیل جرم

$$x_{com} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int x\,dm}{m}$$

$$y_{com} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int y\,dm}{m}$$

$$z_{com} = \frac{\int z\,dm}{\int dm} = \frac{\int z\,dm}{m}$$

«مرکز جرم اجسام همگن»

همگن برابر

$$\rho = \frac{m}{v} \;/\; \rho = \frac{dm}{dv} \longrightarrow dm = \rho\,dv$$

ناهمگن نابرابر

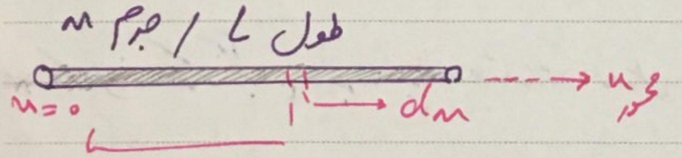
$$x_{com} = \frac{\int x\rho\,dv}{\rho v} \longrightarrow \frac{\cancel{\rho}\int x\,dv}{\cancel{\rho} v} = \frac{\int x\,dv}{v}$$

$$y_{com} = \frac{\int y\rho\,dv}{\rho v} \longrightarrow \frac{\cancel{\rho}\int y\,dv}{\cancel{\rho} v} = \frac{\int y\,dv}{v}$$

$$z_{com} = \frac{\int z\rho\,dv}{\rho v} \longrightarrow \frac{\cancel{\rho}\int z\,dv}{\cancel{\rho} v} = \frac{\int z\,dv}{v}$$

مثال: مرکز جرم یک میله ی نازک و همگن به جرم m و طول L را بدست آورید:

طول L / جرم m



$$x_{com} = \frac{\int x\,dm}{m} = \frac{\int x \frac{m\,dx}{l}}{m} = \frac{\frac{\cancel{m}}{l}\int x\,dx}{\cancel{m}} = \frac{1}{l}\left[\frac{x^2}{2} - 0\right] = \frac{l}{2}$$

جرم m * طول L

$dm = ?$ dx

«استفاده از تقارن برای بدست آوردن مرکز جرم»

* اگر جسم دارای مرکز تقارن باشد مرکز جرمش همان مرکز تقارن آن می باشد مانند کره ی همگن

* اگر جسم دارای محور تقارن باشد مرکز جرمش برروی محور تقارنش قرار دارد مانند کله قند

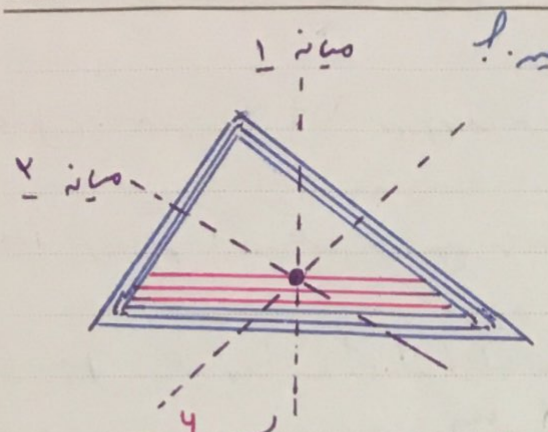
* اگر جسمی دارای صفحه ی تقارن باشد مرکز جرمش برروی صفحه تقارنش قرار دارد مانند سماور

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: مرکز جرم یک صفحه‌ی فلزی همگن ۲ به شکل مثلث را بیابید.

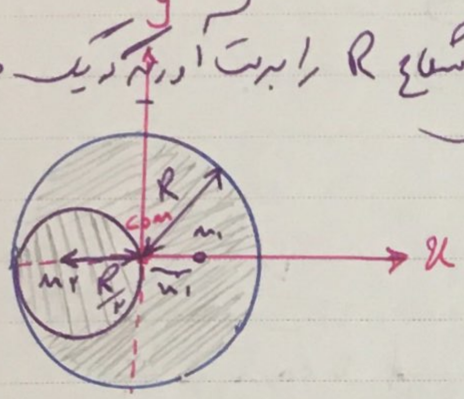


محل تلاقی میانه‌ها

(فرقی نمیکنه به [illegible])

very imp

مثال: مرکز جرم یک ورقه‌ی نازک همگن دایره‌ای به شعاع R را بدست آورید که یک دایره به شعاع $\frac{R}{2}$ از آن جدا شده است.



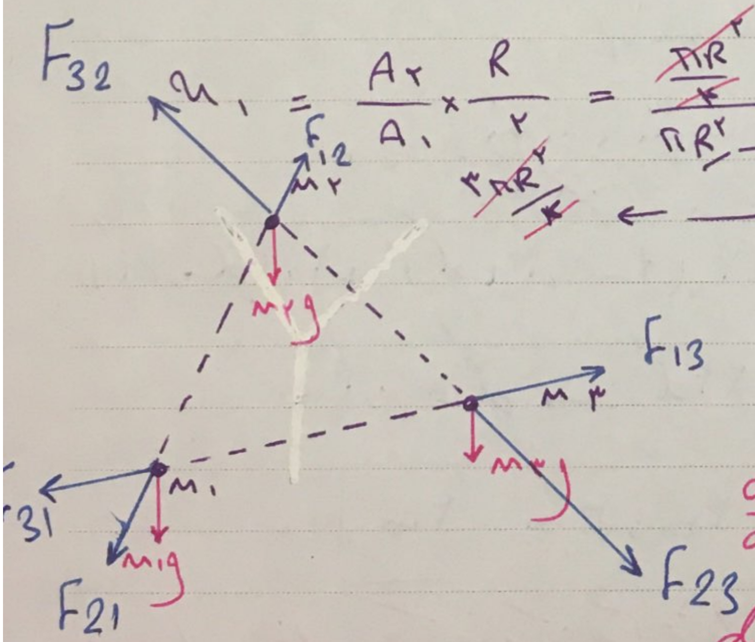
$y_{com} = 0$

یک دایره به جرم m_2 با چگالی دایره‌ی بزرگتر در قسمت خالی قرار دارد.

$$x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \longrightarrow 0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$m_1x_1 = -m_2x_2 \longrightarrow x_1 = +\frac{m_2}{m_1}\left(+\frac{R}{2}\right)$$

$$x_1 = \frac{A_2}{A_1} \times \frac{R}{2} = \frac{\cancel{\frac{\pi R^2}{4}}}{\underbrace{\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{4}}_{\cancel{\frac{3\pi R^2}{4}}}} \times \frac{R}{2} = \boxed{\frac{R}{6} = x_1}$$



معادلات حاکم بر حرکت مرکز جرم:

$$Mx_{com} = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dt}$$

$$Mv_{com} = m_1v_1 + m_2v_2 + \cdots$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dt}$$

$$Ma_{com} = m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots$$

* نیروهای داخلی در شتاب مرکز جرم تأثیری ندارد

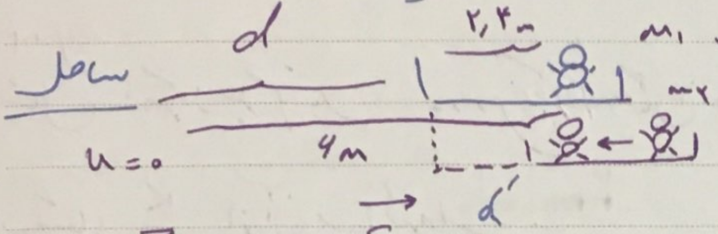
$$\underbrace{M}_{\text{جرم کل دستگاه}} . \underbrace{\vec{a}_{com}}_{\text{شتاب مرکز جرم}} = \underbrace{\vec{F}_{ext}}_{\text{برآیند نیروهای خارجی وارد بر ذرات}} \quad // \text{ very imp}$$

endbook.net
P4PCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: سنگی به جرم ۴kg بر روی قایقی ساکن به جرم ۲۰kg نشسته است و فاصله‌ی سنگ تا ساحل ۶m می‌باشد. اگر سنگ بر روی قایق ۲,۴m به طرف ساحل راه برود فاصله‌ی نهایی سنگ تا ساحل چقدر است؟ (از اصطکاک قایق با آب صرف نظر کنید)



m_1 سنگ $= 4\ kg$

m_2 قایق $= 20\ kg$

$M\vec{a}_{com} = \vec{F}_{ext} \longrightarrow Ma_{com} = 0$ (2)

مرکز جرم — نیروی خارجی

$\longrightarrow a_{com} = 0 \longrightarrow \boxed{V_{com} = \text{ثابت}}$

(1)

$V_{com} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1+m_2} = 0 \quad (1),(2) \longrightarrow x_{com} = \text{ثابت}$

x مرکز جرم در حالت اول — x مرکز جرم در حالت نهایی

$x_{com}|_i = x_{com}|_f$

$\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{\cancel{m_1+m_2}} = \frac{m_1x'_1 + m_2x'_2}{\cancel{m_1+m_2}}$

$4\times 6 + 20d = 4(6-2.4+d') + 20(d+d')$

$4\times 2.4 = 24d' \longrightarrow d' = 0.4m$

$x'_1 = 6 - 2.4 + 0.4 = \boxed{4m}$

نیروهای داخلی در حرکت مرکز جرم تاثیری ندارد.

PAPCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

«پایستگی تکانه‌ی خطی دستگاه ذرات»

تکانه‌ی خطی یا اندازه‌ی حرکت خطی ذره $= \bar{P} = m.\vec{V}$ ($kg\,m/s$)

$P = m_1V_1 + m_2V_2 + m_3V_3 \dots$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = m_1a_1 + m_2a_2 + m_3a_3 + \dots$$

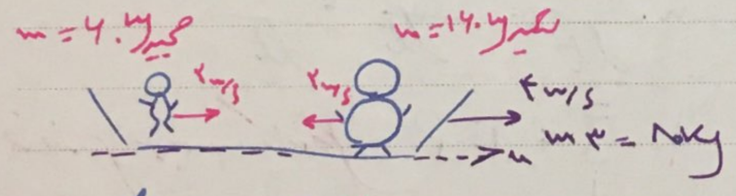
آهنگ تغییر تکانه خطی کل دستگاه ذرات $\leftarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \rightarrow$ برآیند نیروهای خارجی وارد بر دستگاه ذرات

$\vec{P}_i = \vec{P}_f \leftarrow \bar{P} =$ ثابت $\leftarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \leftarrow$ اگر $F_{ext} = 0$

نیروی داخلی تکانه‌ی جزئی را عوض می‌کند ولی تکانه‌ی کلی را نمی‌تواند عوض کند.

مثال: جمیله و سعید که جرم آن‌ها به ترتیب $m_1 = 60kg$ و $m_2 = 160kg$ می‌باشد بر روی قایق با سرعت $4m/s$ در حال حرکت می‌باشد در یک لحظه جمیله و سعید هر یک با سرعت $2m/s$ نسبت به قایق شروع به دویدن به طرف یکدیگر کرده و جایشان را با یکدیگر عوض می‌کنند مطلوب است سرعت قایق در این مدت و جابه‌جایی قایق در این مدت

«اصطکاک قایق با آب صفر است»



$$\frac{dP}{dt} = \cancel{F_{ext}} \rightarrow P_n = \text{ثابت} \rightarrow P_{n_i} = P_{n_f}$$

$$\rightarrow m_1V_1 + m_2V_2 + m_3V_3 = m_1V_1' + m_2V_2' + m_3V_3'$$

$$60 \times 4 + 160 \times 4 + 80 \times 4 = 60(V_3' + 2) + 160(V_3' - 2) + 80V_3'$$

به خاطر این که خلاف جهت حرکت است

PAPCO
Scanned by CamScanner

$\Rightarrow$ ۳۰ = ۳ − ۸ + ۷,۵ v_c' → $v_c' = \frac{۳۵×۲}{۷,۵×۲} = \boxed{\frac{۱۴}{۳}}$

برای ۱/۲ از دید ناظر داخل قایق $\Delta x = vt$ → ۶ = ۲t → $\boxed{t = ۳}$

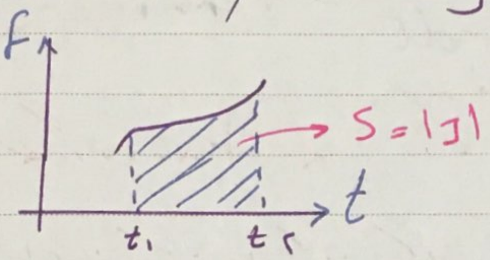
برای قایق از دید ناظر ساکن بیرون $\Delta x = vt$ → $\frac{۱۴}{۳} × ۳ = \boxed{۱۴m}$

"ضربه‌ی نیرو"

ضربه‌ی نیروی ثابت $J = F.\Delta t$ / ضربه‌ی نیروی متغیر $\vec{J} = \int \vec{F} dt$

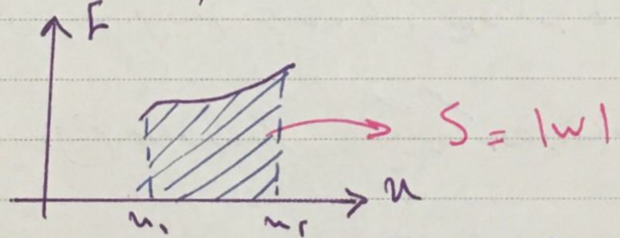
کار = اسکالر

ضربه = برداری



"حاصل ضرب نیرو در مدت زمان اثر نیرو را ضربه‌ی نیرو گویند." تعریف

کار نیروی ثابت $W = F.d$ / $W = \int F.d\vec{r}$



$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow m\frac{dv}{dt} = \frac{dmv}{dt} = \frac{dp}{dt}$

$\int d\vec{p} = \int \vec{F} dt \rightarrow \boxed{\vec{J} = \Delta P}$ قضیه‌ی ضربه ـ تکانه خطی

ضربه‌ی برآیند نیروهای وارد بر جسم

تغییر تکانه‌ی خطی جسم

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

«برخورد» { مسئله‌ی تکانه‌ی ۹-۴ برخورد ماشین }

اگر در مسئله‌ی تکانه‌ی خطی هر یک از ذرات در زمان بسیار کوتاهی به میزان قابل ملاحظه‌ای تغییر کند آن مسئله را برخورد گوییم و قانون پایستگی تکانه‌ی خطی کل ذرات در برخوردها معتبر می‌باشد.

$$\vec{P_i} = \vec{P_f}$$

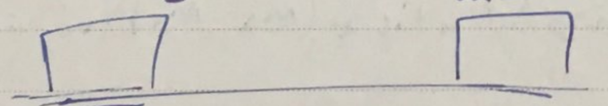
تکانه‌ی خطی کل ذرات در لحظه‌ی قبل از برخورد
در یک بازه ثابت است
— — — بعد از — — —

انواع برخورد:
- برخورد کشسانی یا الاستیک: $P_i = P_f \;/\; K_i = K_f$
- برخورد ناکشسانی یا غیرالاستیک: $P_i = P_f \;/\; K_i \neq K_f$
- به هم چسبیدن = برخورد کاملاً ناکشسان یا کاملاً غیرالاستیک: $P_i = P_f \;/\; K_i \neq K_f$

انواع برخورد:
- یک بعدی: اگر سرعت‌های قبل و بعد از برخورد همگی در یک راستا باشند را گویند
- دو بعدی: 〃 〃 〃 در یک صفحه باشند
- سه بعدی: 〃 〃 خارج صفحه باشند (مثل مولکول)

$V = 10\,m/s$, $m = 4kg$

$V = 0$, $m = 6kg$



تکانه در لحظه‌ی قبل: ۴۰ ، ۰ ، ۴۰

۱۲ واحد تغییر ↓ ، ۱۲ واحد تغییر ↓

بعد از برخورد در لحظه‌ی بعد: ۲۸ ، ۱۲ ، ۴۰

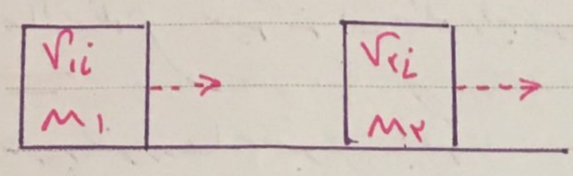
PAPCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: ۲ مکعب با جرم های m_1 و m_2 و سرعت های v_{1i} و v_{2i} برخورد کشسانی یک بعدی انجام می دهند سرعت حرکت هر کدام را بعد از برخورد بدست آورید



$$\begin{cases} P_i = P_f \\ K_i = K_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 v_{1i}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 v_{2i}^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 v_{1f}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (1)\ m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}). \\ (2)\ m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \end{cases}$$

(۱) و (۲) را بر هم تقسیم می کنیم $\Longrightarrow v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$

$$\Longrightarrow (3)\ v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} - v_{1i}$$

(۳) را در رابطه (۱) جایگذاری می کنیم $\Longrightarrow m_1 (v_{1i} - v_{2f} - v_{2i} + v_{1i}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})$

$$\Longrightarrow 2 m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i} = (m_1 + m_2) v_{2f}$$

سرعت جسم ۲ بعد از برخورد $v_{2f} = \dfrac{2 m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}}{(m_1 + m_2)}$

سرعت جسم ۱ بعد از برخورد $v_{1f} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\dfrac{2 m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$

Scanned by CamScanner

۹

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

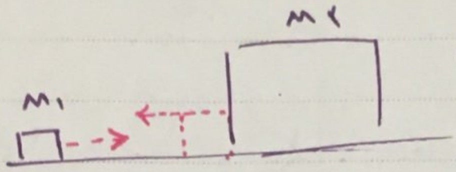
طبق ۲ فرمول بدست آمده برای مسئله قبل نکات زیر جالب است.

۱_ حالت خاص: اگر $m_1 = m_2$ باشد.

* $v_{2f} = v_{1i}$ ، $v_{1f} = v_{2i}$

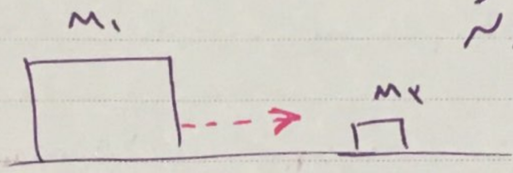
«سرعت های قبل و بعد با هم عوض می شوند»

۲_ اگر $m_1 \ll m_2$ باشد



* $v_{2f} = 0$ ، $v_{1f} = -v_{2i}$

۳_ اگر $m_1 \gg m_2$ باشد

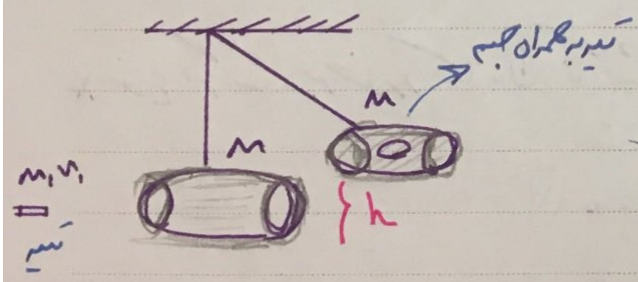


* $v_{2f} = 2v_{1i}$ ، $v_{1f} = v_{1i}$

آونگ بالستیک

* درباره‌ی هایی که از اتلاف انرژی مثل اصطکاک یا مقاومت هوا صرف نظر می کنیم چون برخورد برای لحظه‌ی کوتاه است ولی اگر لحظه زیاد شود باید اتلاف حساب شود.

مثال: گلوله‌ای به جرم m و سرعت v_0 مطابق شکل با قطعه چوبی به جرم M برخورد کرده و درون آن فرو می رود. در اثر ضربه این گلوله مجموعه‌ی گلوله و قطعه چوب به ارتفاع h بالا می رود سرعت گلوله قبل از برخورد با قطعه چوب را بدست آورید (اتلاف ناچیز)



* برخورد یک بعدی است چون لحظه ای که برخورد می کند در لحظه‌ی بعد هر ۲ محور افقی است و برخورد کاملاً غیر الاستیک و کاملاً ناکشسان است.

PAPCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

کاملا غیرالاستیک

$K_i \neq K_f$

جهت سرعت نداشته

$P_i = P_f \Rightarrow mV_0 + 0 = (m+M)V$

$\Rightarrow V_0 = \frac{(m+M)V}{m}$ ... (1)

از مقاومت ها صرف نظر کرد $\Rightarrow E_1 = E_2$

$K_1 + \cancel{U_1} = K_2 + U_2$

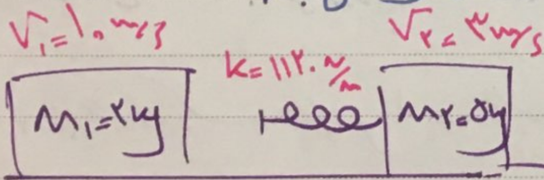
$\Rightarrow \frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh$

$\Rightarrow V = \sqrt{2gh}$ ... (2)

(2), (1) $\Rightarrow V_0 = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gh}$

پایستگی انرژی برای وقتی است که بعد از برخورد دارد حرکت می کند.

مثال: ۲ مکعب با جرم های $m_1 = 2kg$, $m_2 = 5kg$ به ترتیب با سرعت های $10 m/s$, $3 m/s$ در یک جهت در حال حرکت است و فنری با ثابت $K = 1120 N/m$ به انتهای m_2 وصل شده. m_1 به m_2 رسیده و فنر را متراکم می کند. بیشینه تراکم فنر را بدست آورید. سطح بدون اصطکاک می باشد.



* نوع حرکت برخورد کاملاً ناکشسانی یک بعدی

$P_i = P_f \rightarrow 2\times10 + 3\times5 = (2+5)V \rightarrow \boxed{V = 5 m/s}$

$K_i = K_f + U \Rightarrow \frac{1}{2}\times2\times10^2 + \frac{1}{2}\times5\times3^2 = \frac{1}{2}(2+5)5^2 + \frac{1}{2}\times1120\times x^2$

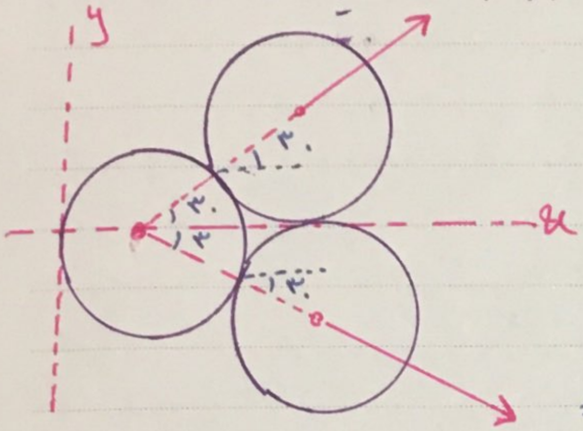
$70 = 1120x^2 \rightarrow x^2 = \frac{7}{112} \rightarrow x = \frac{1}{4} = 0.25$

PAPCO
Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

endbook.net

مثال: بر روی سطح افقی و بدون اصطکاک با ۲ گلوله‌ی مشابه خود گلوله‌ای با سرعت ۱۰ m/s با آن ۲ گلوله که ثابت هستند برخورد می‌کند. به خورد کشسان انجام می‌دهند سرعت هر یک از گلوله‌ها را بعد از برخورد به دست آورید. از اصطکاک گلوله‌ها با زمین صرف نظر شود...



$$\begin{cases} P_i = P_f \\ K_i = K_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{ix} = P_{fx} \\ P_{iy} = P_{fy} \\ K_i = K_f \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\times 10 + 0 + 0 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \cos 30 + m_3 V_3 \cos 30 \\ 0+0+0 = 0 + m_2 V_2 \sin 30 - m_3 V_3 \sin 30 \\ \cancel{\tfrac{1}{2}} m \times (10)^2 + 0 + 0 = \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 V_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 V_2^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_3 V_3^2 \end{cases}$$

رابطه‌ی دوم $\Rightarrow m \sin(V_2 - V_3) = 0 \Rightarrow \boxed{V_2 = V_3}$

رابطه‌ی اول $\rightarrow 10 = V_1 + 2V_3 \cos 30 \rightarrow V_1 = 10 - V_2\sqrt{3}$

رابطه‌ی سوم $\rightarrow 10^2 = (10 - V_2\sqrt{3})^2 + V_2^2 + V_2^2$

$$\Rightarrow 3V_2^2 - 20V_2\sqrt{3} + 2V_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5V_2^2 - 20\sqrt{3}V_2 = 0 \rightarrow \boxed{V_2 = 4\sqrt{3}}$$

$$V_1 = 10 - (4\sqrt{3})\sqrt{3} = \boxed{-2}$$

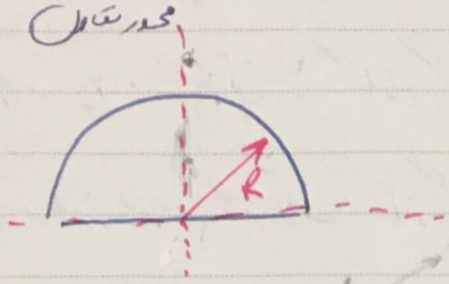
P4PCO

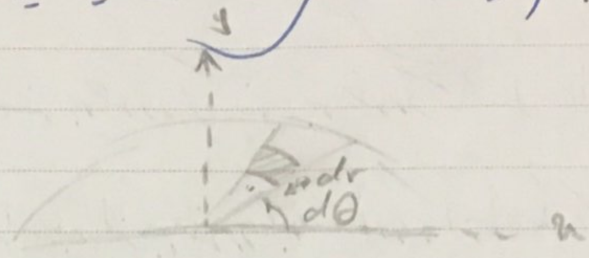
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* مرکز جرم یک ورقه نازک نیم دایره به شعاع R را به دست آورید که همگن است





$y = r\sin\theta$

$$y_{com} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} \qquad dm = \frac{dA\cdot m}{\frac{A}{2}}$$

$x_{com} = 0$ محور

$$\Rightarrow y_{com} = \frac{\int_0^R \int_0^\pi r\sin\theta \times \frac{r\,dr}{r^2}\,d\theta}{\int dm}$$

$\int \sin\theta\, d\theta$

$-\cos\theta$

$-1-1$

$$\int dm = m = \theta\cdot\frac{A}{2} = \theta\times\frac{\pi r^2}{2}$$

شعاع × دایره = کمان

$$y_{com} = \frac{m\times 4\times r^3}{R^2\times\pi\times 3\times m} = \frac{4\times R^3}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi} = 0.4R$$

$$y_{com} = \int y\,dm = \int \frac{r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta}{R^2}$$

جرم	مساحت
m	$\frac{\pi r^2}{2}$
dm	dA

$$\Rightarrow \int \frac{r^2\sin\theta\,dr\,d\theta}{R^2} \qquad \int_0^R\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\,dr$$

$$dm = \frac{dA\times m}{\frac{\pi r^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{R^2}\times\frac{m}{\frac{\pi}{2}}\times\int r^2\,dr\,\sin\theta\,d\theta$$

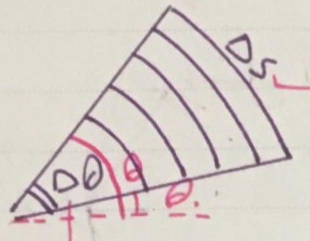
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محور دوران: خطی می باشد که از مرکز تمام دایره های که نقاط مختلف جسم طی می کنند عبور کرده و برهمه ی این دایره ها عمود می باشد.

دوران خالص: اگر در گذشت زمان محور دوران در فضا عوض نشود را گویند



در هر نقطه متغیر است = جابجایی خطی

در هر نقطه ثابت است = جابجایی زاویه ای

متوسط سرعت زاویه ای $\bar{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ "rad/s" — برای همه نقاط ثابت چون $\Delta\theta$

← در هر میانگین

* لحظه ای سرعت زاویه ای $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ "rad/s"

← در هر لحظه

متوسط شتاب زاویه ای $\bar{\alpha} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ "rad/s²" — برای همه نقاط ثابت به خاطر ω

← در هر بازه به طور متوسط

* لحظه ای شتاب زاویه ای $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ "rad/s²"

← در هر لحظه

نکته: ‖ α (شتاب زاویه ای)، ω (سرعت زاویه ای) و $\Delta\theta$ (جابجایی زاویه ای) ‖ به شرط این که حرکت دورانی خالص باشد ثابت است "هر کمیتی پسوند زاویه ای دارد ثابت است"

"حرکت دورانی یکنواخت"

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\omega} = \omega \\ \omega = \text{ثابت}\end{array}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{\theta - \theta_0}{t}$$

$$\Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega t \longrightarrow \theta = \omega t + \theta_0 \quad \text{یا} \quad \Delta\theta = \omega t$$

← معادله ی مکان زاویه ای برحسب زمان

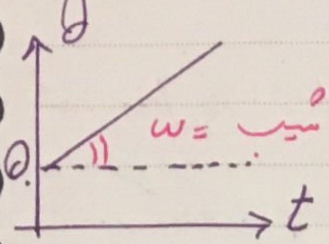
PAPCO

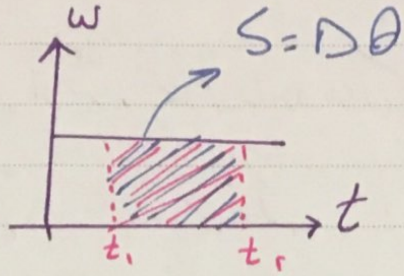
endbook.net

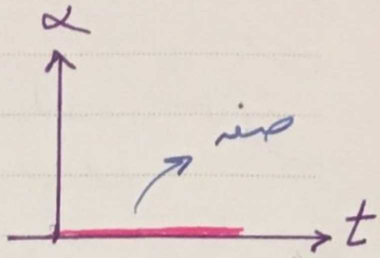
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )







$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

سرعت زاویه‌ای اول (اولیه)

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$

مستقل از زمان

حرکت دورانی با شتاب زاویه‌ای ثابت

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

$$\Delta\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right) t$$

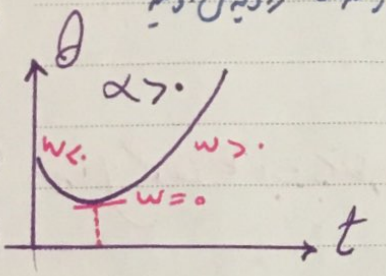
مستقل از شتاب

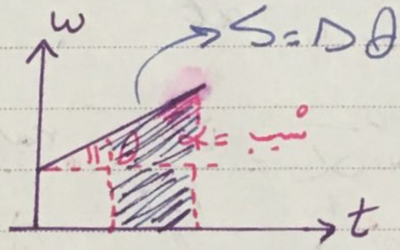
$\alpha =$ ثابت

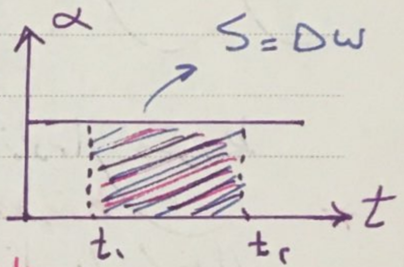
$$\theta = -\frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega t + \theta_0$$

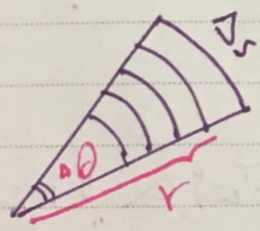
سرعت زاویه‌ی آخر

معادله‌ی مستقل از سرعت زاویه‌ی اولیه









روابط بین متغیرهای خطی و زاویه‌ای در شکل زیر

جابه‌جایی خطی $\Delta S_{(m)} = r\,\Delta\theta^{(rad)}$ جابه‌جایی زاویه‌ای

سرعت خطی $\leftarrow \underset{m/s}{V} = r \cdot \underset{rad/s}{\omega} \rightarrow$ سرعت زاویه‌ای

شتاب مماسی $\leftarrow \underset{m/s^2}{a_T} = r \cdot \underset{rad/s^2}{\alpha} \rightarrow$ شتاب زاویه‌ای

شتاب مرکزگرا $\leftarrow \underset{m/s^2}{a_r} = r \cdot \omega^2$

a_p شتاب خطی
اگر هر ۲ را داشته باشد

* متغیر خطی ← فرق می‌کند / * متغیر زاویه‌ای فرق نمی‌کند

PAPCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* شتاب مرکزگرا به علت تغییر جهت سرعت خطی به وجود می‌آید.

و شتاب مماسی به علت تغییر اندازه‌ی سرعت خطی به وجود می‌آید *

در حرکت دورانی یکنواخت چون جهت حرکت عوض می‌شود شتاب مرکزگرا به وجود می‌آید و چون تغییر مقدار ندارد شتاب مماسی ندارد.

شتاب خطی $a = \sqrt{a_T^2 + a_r^2}$

شتاب مماسی ← a_T ، a_r → شتاب مرکزگرا

* حرکت دورانی: شتاب مرکزگرا ـ شتاب زاویه‌ای

شتاب مماسی ـ شتاب خطی

مثال: میله‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت $2\,rad/s$ حول محور ثابت در حال حرکت دورانی یکنواخت است مطلوبست زاویه‌ی طی شده توسط میله در ۳ ثانیه‌ی اول

$\Delta\theta = \omega t \Rightarrow \Delta\theta = 6\,rad$

مسافت طی شده در ۳ ثانیه‌ی اول برای نقطه‌ای از میله که تا محور دوران $4m$ فاصله دارد.

$\Delta S = r \cdot \Delta\theta \Rightarrow 4 \times 6 = 24\,m$

مقدار سرعت خطی برای همان نقطه از میله چقدر است.

$V = r \cdot \omega \rightarrow 4 \times 2 = 8\,m/s$

مقدار شتاب مماسی ← برابر صفر زیرا حرکت یکنواخت است

مقدار شتاب خطی ← همان شتاب مرکزگرا ← $r\omega^2 \rightarrow 4 \times (2)^2 = 16$

PAPCO
Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: میله‌ای با شتاب زاویه‌ای ثابت $2\,rad/s^2$ و سرعت زاویه‌ای اولیه‌ی $2\,rad/s$ حول یک محور ثابت شروع به دوران می‌کند مطلوب است:

* زاویه‌ی طی شده در ۲ ثانیه‌ی اول حرکت

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \cancel{\theta_0} \longrightarrow \frac{1}{2} \times 2 \times (4) + (1)(2) + 0 = \boxed{6}$$

* سرعت زاویه‌ای میله ۲s پس از آغاز حرکت چقدر است.

$$\omega = \alpha t + \omega_0 = 2 \times 2 + 1 = 5\,rad/s$$

* مسافت طی شده در ۲s اول حرکت برای نقطه‌ای از میله که تا محور دوران ۵m فاصله دارد.

$$\Delta S = r \cdot \Delta\theta = 5 \times 6 = 30\,m$$

* مقدار سرعت خطی همان نقطه از میله در لحظه‌ی $t = 2s$

$$V = r \cdot \omega = 5 \times 5 = 25\,m/s$$

* شتاب مماسی

$$a = r \cdot \alpha = 5 \times 2 = 10\,m/s^2$$

* شتاب مرکزگرا

$$a = r \cdot \omega^2 = 5 \times (5)^2 = 125$$

* شتاب خطی

$$a = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{(10)^2 + (125)^2}$$

* که اگر یکی از جهت‌های متقابل درست است.

$\vec{V} = \vec{r} \cdot \omega$ × غ

$r \cdot \vec{\omega}$ × غ

$\vec{r} \times \omega$ × غ

$\vec{\omega} \times \vec{r}$ ✓ ص

بردار

PAPCO

endbook.net
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ← بردار نیست چون از خاصیت بردار ها بدست نمی آید چون اگه بردار باشه باید $a+b=c$ اگه باشه $b+a=c$ هم باشه

ولی این طور نیست

ولی $\Delta\theta$ به یک شرط بردار می تواند باشه آن که خیلی کوچک باشه مثل کتاب ← $4°$ ← برداراست، $90°$ ← بردار نیست

$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$

۴ انگشت دست راست در جهت حسم قرار داده انگشت شست گیم بردار ω را نشان می دهد

روابط بین متغیر ها، زاویه ای و خطی شکل برداری

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

شتاب خطی $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt}$

$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \omega \times \frac{dr}{dt}$

شتاب خطی $\Rightarrow \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$

$a_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ ← شتاب مماسی

شتاب مرکزگرا → $a_r = \vec{\omega} \times \vec{v}$

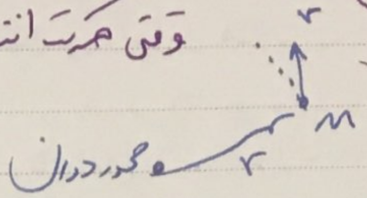
شتاب مرکزگرا به برداری

PAPCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انرژی جنبشی دوران



وقتی حرکت انتقالی است ← $\frac{1}{2}mv^2$

1 ← چون هیچ ذره‌ای نسبت به یکدیگر تمایز ندارد

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(r\omega)^2=\frac{1}{2}\overbrace{(mr^2)}^{I}\omega^2 \Rightarrow K=\frac{1}{2}I\omega^2$$

اینرسی دورانی یا لختی دورانی _ اینرسی چرخشی _ لختی چرخشی _ گشتاور دوم

فاصله‌ی ذره تا محور دوران (m) ← $I=mr^2$ ← لختی دورانی یک ذره ($kg\,m^2$)

جرم یک ذره (kg) ← 1

«انتقالی» «دورانی»

انرژی جنبشی انتقالی «$K=\frac{1}{2}mv^2$» «$K=\frac{1}{2}I\omega^2$» انرژی جنبشی دورانی

لختی انتقالی یا اینرسی انتقالی «m» «I» لختی دورانی یا اینرسی دورانی

نکات

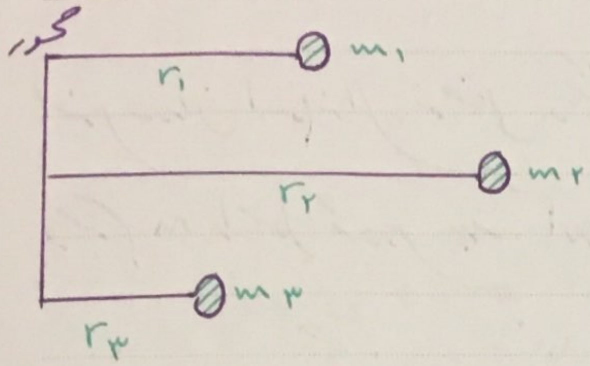
* ۲.۲ ← نرده‌ای — ۲ ← برداری
* I, m هر ۲ نرده‌ای و مثبت است.
* m برای یک جسم یک عدد منحصر به فرد است ولی I برای یک جسم یک عدد منحصر به فرد نیست چون بستگی به محل چه محوری می‌چرخد یعنی به r بستگی دارد.
* هرچه جرم یک جسم بیشتر باشد میل آن جسم به حفظ حالت خود بیشتر می‌شود در انتقال به همین علت به جرم، اینرسی انتقالی یا لختی انتقالی گفتیم
* میل یک جسم به حفظ حالت خود را در دوران اینرسی دورانی یا لختی دورانی می‌گوییم

دوران را با I نشان می‌دهیم. مثال:

PAPCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

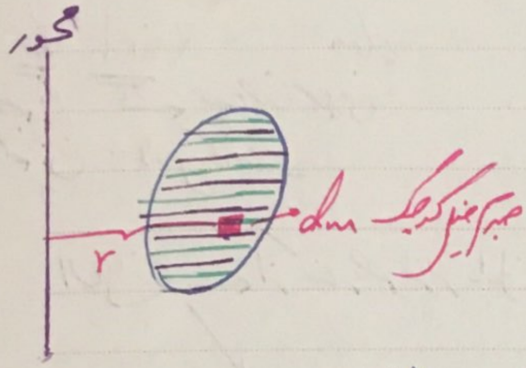
Subject:
Year. Month. Date. ( )



اینرسی دورانی برای جرم های گسسته

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$



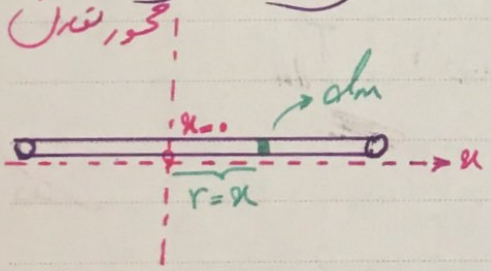
اینرسی دورانی برای جرم های پیوسته

$$I = \int r^2 dm$$

فاصله‌ی المان جرم تا محور دوران

* هر وقت تعداد ذره ها خیلی زیاد شود Σ به $\int$ تبدیل می شود.

مثال: اینرسی دورانی میله‌ای نازک و همگن به جرم m و طول l را حول محوری بدست آورید که از مرکز جرم میله عبور کرده و به میله عمود است



جرم	طول
m	l
dm	dx

$$dm = \frac{dx \cdot m}{l}$$

$$I = \int r^2 dm = \int x^2 dm$$

$$\Rightarrow \int x^2 \frac{m\,dx}{l} \Rightarrow \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx$$

$$= \frac{m}{l} \left[\frac{(l/2)^3}{3} - \frac{(-l/2)^3}{3} \right] = \frac{m}{l} \left[\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24} \right] = \frac{1}{12} m l^2$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

$\pi b^2 h - \pi a^2 h \longrightarrow \pi(b^2-a^2)h$

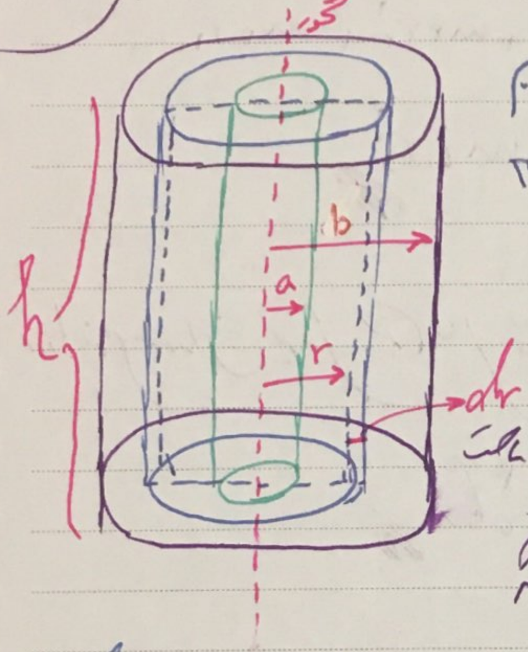
Subject:
Year. Month. Date. ( )

حجم πr^2

محیط $2\pi r$

اینرسی دورانی استوانه ای توخالی و همگن به شعاع داخلی a و خارجی b و ارتفاع h

و جرم m را حول محوری بدست آورید که از مرکز جرم استوانه عبور کرده و موازی استوانه باشه



حجم المان $\pi(r+dr)^2h - \pi r^2 h$

$\pi h\left[r^2+dr^2+2rdr-r^2\right]$

$= 2\pi rh\,dr$

جرم	حجم
m	$\pi(b^2-a^2)h$
dm	$2\pi rh\,dr$

محیط

مساحت جانبی

حجم آن

لایه ی کوچک

المان ← از کنار هم قرار دادن المان ها جسم اصلی ایجاد بشه

فاصله ی المان انتخابی تا محور یک عدد باشه

$$dm = \frac{2rm\,dr}{(b^2-a^2)} \Rightarrow \int r^2 \times \frac{2rm\,dr}{b^2-a^2} = \frac{2m}{b^2-a^2}\int_a^b r^3\,dr$$

$$= \frac{2m}{b^2-a^2}\left[\frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}\right] = \frac{1}{2}m\,(a^2+b^2) = I$$

نکات

* هرچه m بیشتر باشه I بیشتر می شود

* هرچه (b, a) بیشتر باشه ذره ها دورتر می شود و I بیشتر می شود

* زیاد یا کم شدن h در فاصله ی آن ها تا محور تاثیری ندارد پس بر I تاثیر ندارد

* در I، فاصله ی ذره ها تا محور ملاک است نه فاصله ی آن ها از هم

PAPCO

Scanned by CamScanner

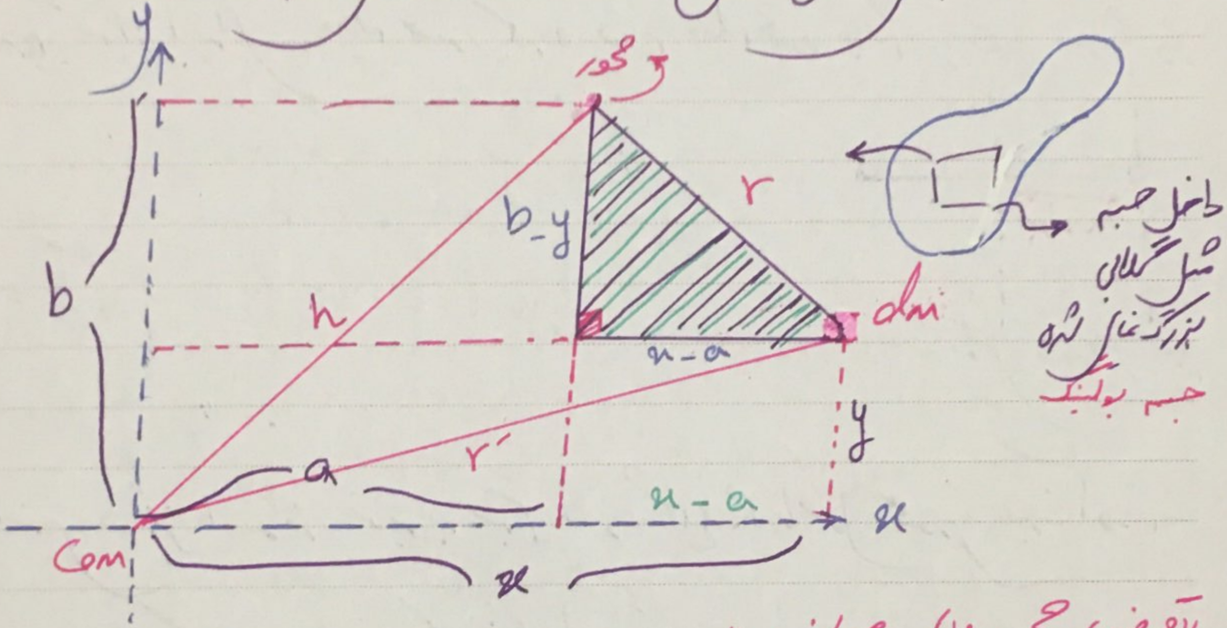
endbook.net

$$I = \frac{1}{2} m (a^2 + b^2)$$

* $a = 0$ استوانه توپُر $I = \frac{1}{2} m r^2$

* $a = b$ پوسته استوانه $I = m r^2$

*۲ قسمت بالا برای حل مسائل قضیه اهمیت فراوانی دارد.



قضیه محورهای موازی

$$I = \int r^2 dm = \int [(x-a)^2 + (b-y)^2] dm = \int (x^2 + y^2 + a^2 + b^2 - 2ax - 2by) dm$$

$$-2a\int x\,dm$$

$$I = \int \overbrace{(x^2+y^2)}^{r'^2} dm + \int \overbrace{(a^2+b^2)}^{h^2} dm - \int 2ax\,dm - \int 2by\,dm$$

$$-2b\int y\,dm$$

$$I = I_{com} + m h^2$$

اینرسی دورانی

جسم حول محور دلخواه

فاصله ۲ محور از هم

جرم کل جسم

اینرسی دورانی جسم حول محوری

که از مرکز جرم جسم می گذرد و موازی محور دلخواه می باشد

$$x_{com} = \frac{\int x\,dm}{m}$$

$$\int x\,dm = 0$$

$$y_{com} = \frac{\int y\,dm}{m}$$

$$\int y\,dm = 0$$

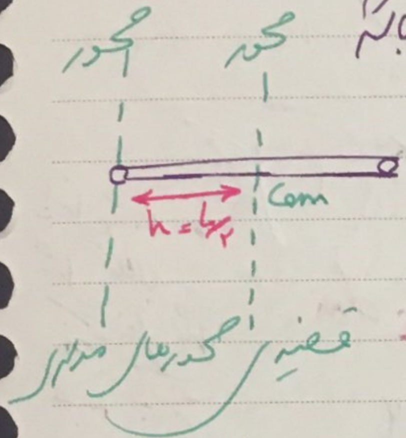
PAPCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

* I و I_{com} : اینرسی دورانی یک جسم حول محورهای موازی مختلف هنگامی کمترین مقدار را دارد که آن محور از مرکز جرم جسم عبور کند و هر محوری دورتر از مرکز جرم باشد I بیشتر می شود.

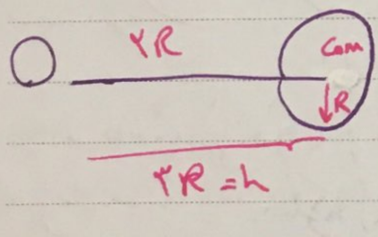
مثال: اینرسی دورانی میله ای نازک و همگن به جرم m و طول l را حول محوری بدست آورید که از ابتدای میله عبور کرده و بر میله عمود باشد.



$$I = I_{com} + mh^2$$

$$\frac{1}{12} m l^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \longrightarrow I = \frac{1}{3} m l^2$$

مثال: اینرسی دورانی استوانه توپر به جرم m و شعاع R را حول محوری بدست آورید که از نقطه‌ی O عبور کرده و بر صفحه‌ی کاغذ عمود است؟



$$I = I_{com} + mh^2 \Rightarrow \frac{1}{2} mR^2 + m(3R)^2 = \frac{19}{2} mR^2$$

گشتاور نیرو

PAPCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

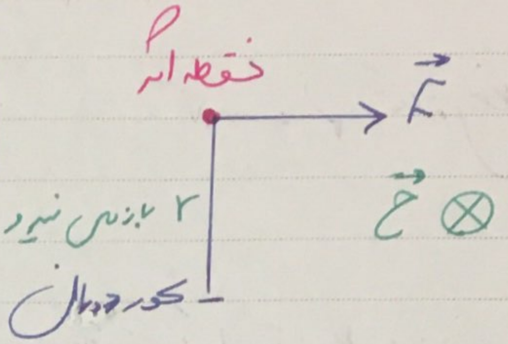
«گشتاور نیرو»

$$\tau = F.r.\sin\theta$$

- τ ← کمیت برداری
- τ (آیا دا) ← مقدار گشتاور نیرو |Nm|
- r ← مقدار بازوی نیرو |m|
- F ← مقدار نیرو |N|
- θ ← زاویه‌ی بین r و F

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

- $\vec{\tau}$ ← گشتاور نیرو |Nm|
- $\vec{r}$ ← بازوی نیرو |m|
- $\vec{F}$ ← نیرو |N|



قانون دوم نیوتن در دوران «چرخش»

اگر به جسمی گشتاوری وارد شود، آن جسم شتاب زاویه‌ای در همان جهت گشتاور پیدا می‌کند و مقدار این شتاب زاویه‌ای با مقدار گشتاور در رابطه‌ی مستقیم و با اینرسی دورانی آن جسم نسبت عکس دارد «معکوس»

«حرکت انتقالی ...»	«حرکت دورانی ...»	«حرکت انتقالی»	«حرکت دورانی»
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$	$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
دینامیک دورانی	دینامیک دورانی	$W = \Delta K$	(قضیه‌ی کار و انرژی) $W = \Delta K$
$\vec{a} \propto \vec{F}$	$\vec{\alpha} \propto \vec{\tau}$	$W = F\Delta x$ (کار نیروی ثابت)	$W = \tau\Delta\theta$ (کار گشتاور ثابت)
$a \propto \frac{1}{m}$	$\alpha \propto \frac{1}{I}$	$W = \int F\,dx$ (کار نیروی متغیر)	$W = \int \tau\,d\theta$ (کار گشتاور متغیر)
$a = \frac{\vec{F}}{m}$	$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I}$		
$\vec{F}$	$\vec{\tau}$		

Scanned by CamScanner

"حرکت انتقالی"

توان $P=\frac{dw}{dt}=\vec{F}.\vec{V}$

"حرکت دورانی"

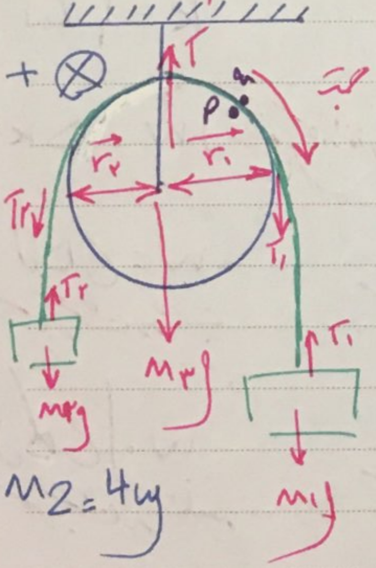
توان $P=\frac{dw}{dt}=\vec{\tau}.\vec{\omega}$

$$"W=\int P\,dt"$$

تکانه خطی $P=mV$

تکانه زاویه‌ای $\vec{L}=I\vec{\omega}$

مثال: ۲ وزنه به جرم های $m_1=1kg$ ، $m_2=4kg$ مطابق شکل توسط ریسمان سبکی به یکدیگر متصل شده‌اند و ریسمان از روی قرقره‌ای که به جرم $m_3=2kg$ و شعاع $10cm$ عبور کرده است: مطلوبست ۱) شتاب انتقالی وزنه‌ها ۲) شتاب زاویه‌ای قرقره ۳) نیروی کشش ریسمان در طرفین قرقره ، مقدار شتاب خطی - شتاب مرکزگرا برای نقطه P از قرقره که $4cm$ فاصله دارد $5s$ پس از آغاز حرکت وزنه‌ها را از حالت سکون رها کرده‌ایم و همچنین فرض می‌کنیم ریسمان نسبت به قرقره نمی‌لغزد.



به خاطر این که به این سمت حرکت می‌کند ⊗ جهت + فرض شود $\xrightarrow{r} F \otimes \omega \Rightarrow$

$R=10cm$

$m_3=2kg$

$m_1=10cm$

حرکت انتقالی $m_1 \to F=ma \to m_1g-T_1=m_1a$; (1) $\to T_1=60N$

$m_2 \to T_2-m_2g=m_2a$; (2) $T_2=56N$

حرکت دورانی $m_3 \to \vec{\tau}=I\vec{\alpha} \Rightarrow T_1R\sin 90-T_2R\sin 90=(\frac{1}{2}mR^2)\alpha$

$\Rightarrow T_1-T_2=\frac{1}{2}m_3R\alpha$ (3)

endbook.net
Subject: Year. Month. Date. ( )
PAPCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

W

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$V_P = V_Q \longrightarrow R\omega = V \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \boxed{R\alpha = a}_{4} \Rightarrow \alpha = 40 \frac{rad}{s^2}$

$3,4 \Rightarrow \boxed{T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m_3 a}_{5}$ $\qquad a = 4 \frac{m}{s^2}$

$1,2,5 \Rightarrow m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}) a \longrightarrow 100 - 40 = (10 + 4 + \frac{2}{3}) a$

$V = at + V_0 \longrightarrow 4 \times 5 = 20 \frac{m}{s}$

$V = r\omega = \frac{4}{100} \times 200 = 8 \frac{m}{s}$

$\omega = \alpha t + \omega_0 = 40 \times 5 = 200 \frac{rad}{s}$

$a_r = r\omega^2 = \frac{4}{100} \times 200 \times 200 = 1600 \frac{m}{s^2}$

$a = \sqrt{(1600)^2 + (1.6)^2} = \ldots$ جمع بش

$a_T = r\alpha = \frac{4}{100} \times 40 = 1.6 \frac{m}{s^2}$

$P_{T_1} = \vec{\tau}_{T_1} \cdot \vec{\omega} = \tau_{T_1} \omega \cos\theta^0 = 60 \times \frac{1}{10} \times 1 \times 80 = 480 w$

$P_{T_2} = \vec{\tau}_{T_2} \cdot \vec{\omega} = \tau_{T_2} \omega \cos 180 = -T_2 R \sin 90 \omega = -56 \times \frac{1}{10} \times 80 = -448 w$

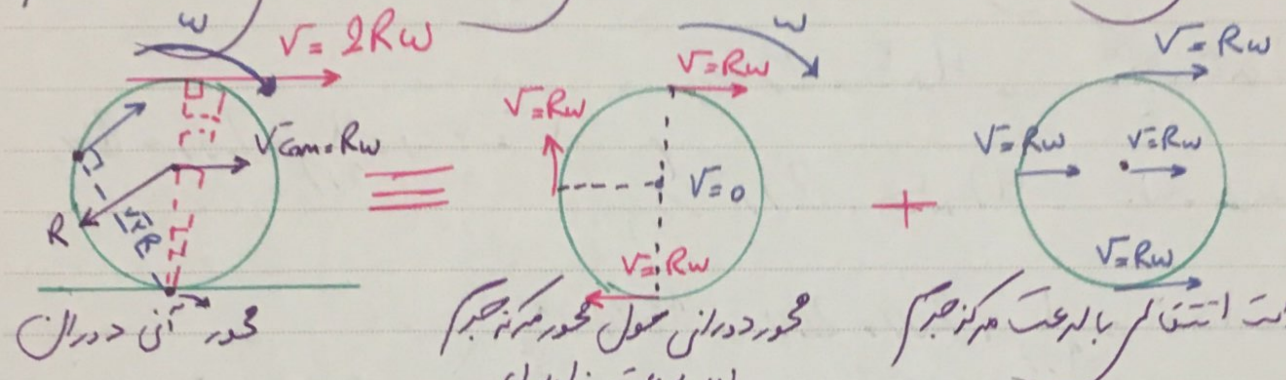
PAPCO

Scanned by CamScanner

«حرکت غلتشی «حرکت انتقالی + حرکت دورانی»»

هر حرکت غلتشی حول محور آنی را می‌توان ترکیب ۲ حرکت زیر در نظر گرفت یک

حرکت دورانی حول محور مرکز جرم با سرعت زاویه‌ای |ω| و دیگر حرکت انتقالی با سرعت مرکز جرم جسم



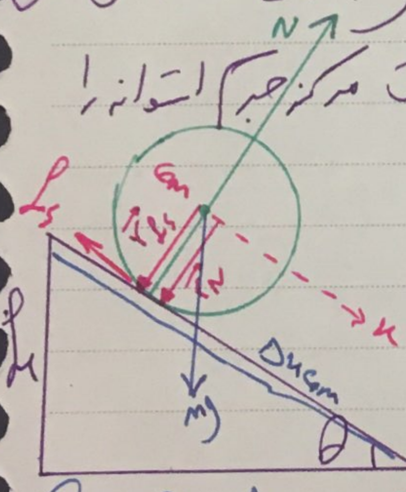
نکته: محور آنی در یک لحظه خیلی کوچک است که هر ۲ نقطه به یک محور آنی می‌رسند

که چون لحظه کم است حرکت ایستایی است «اصطکاک ایستایی حول آن نقطه‌ی چرخه»

مثال: استوانه‌ی توپری به شعاع R از بالای سطح شیب داری به ارتفاع h از حال سکون

شروع به حرکت کرده بدون لغزش می‌لغزد و پایین می‌آید سرعت مرکز جرم استوانه را

هنگام رسیدن به پایین سطح شیب دار بدست آورید.



روش اول

$$F = ma \begin{cases} F_x = ma_x \rightarrow mg\sin\theta - f_s = ma_{com} & (1) \\ F_y = ma_y \rightarrow N - mg\cos\theta = ma_y & N = mg\cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \rightarrow R f_s \sin 90 = (\tfrac{1}{2}mR^2)\alpha$$ حرکت دورانی حول محور دوران

$$f_s = \tfrac{1}{2} m\alpha R \quad (2)$$

$$\sin\theta = \frac{h}{\Delta x_{com}}$$

$$\Delta x_{com} = \frac{h}{\sin\theta}$$

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\tau = rf\sin\theta$

$V_{com} = R\omega \xrightarrow[\text{به زمان}]{\text{مشتق نسبت}} a_{com} = R\alpha$ 3

$2,3 \Rightarrow f_{s1} = \frac{1}{2} m a_{com}$ 4

$1,4 \Rightarrow mg\sin\theta = \frac{3}{2} m a_{com} \longrightarrow a_{com} = \frac{2}{3} g\sin\theta$

$V_{com}^2 - V_{0com}^2 = 2a\Delta x \longrightarrow V_{com}^2 = 2\times\frac{2}{3}\sin\theta \times \frac{h}{\sin\theta}$

$\Rightarrow \boxed{V_{com} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}}$

روش اول ⇐ دنبالحل شد ⇐ دینامیک ← $f=ma$ شتاب - نیرو
$\tau = I\alpha$ استفاده از سینماتیک

روش دوم ← چون اصطکاک ایستایی است می توان $E_1=E_2$ استفاده کرد

دلیل ← ۱- $W_{fk}=0$ ← $E_1=E_2$

۲- نیروی اصطکاک ایستایی انرژی را هدر نمی دهد.

← گرما تولید نمی کنه !! جلوی هم واستاده ایم !!

← که نیروی اصطکاک ایستایی صفر است نه به جسم انرژی می دهد نه می گیرد

$W = Fd\sin\theta \Rightarrow W=0$ ←

$E_1 = E_2 \longrightarrow \cancel{K_1} + U_1 = K_2 + \cancel{U_2} \longrightarrow mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$

$\Rightarrow gh = \frac{1}{4}V_{com}^2 + \frac{1}{2}V_{com}^2 = \frac{3}{4}V_{com}^2$

$\Rightarrow V_{com} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

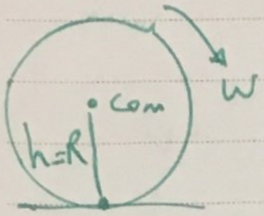
P4PCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

"انرژی جنبشی غلتش"

$$K = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_{com} + m \underbrace{h^2}_{R^2}\right)\omega^2$$

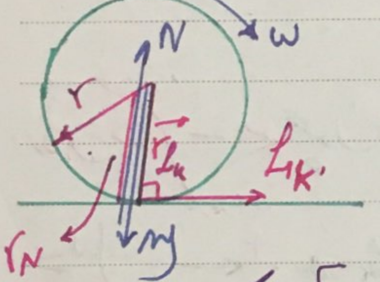


$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} I_{com}\,\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{com}^2$$

"انرژی جنبشی"

محور آنی دوران

مثال: استوانه‌ی توپری به جرم ۲kg و شعاع $R = 10cm$ و با سرعت زاویه‌ای $\omega = 40\ rad/s$ درحال حرکت دورانی می‌باشد در یک لحظه آن را بر روی سطح افقی قرار می‌دهیم چه مدت طول می‌کشد که غلتش بدون لغزش آغاز شود ضریب اصطکاک جنبشی بین استوانه و اصطکاک سطح ۰/۲ می‌باشد



$m = 2kg$
$R = 10\ cm$
$\omega = 60\ rad/s$ $\quad \mu_K = 0{,}2$

حرکت انتقالی با مرکز جرم $F = ma \rightarrow \begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_k = m a_{com} \\ N - mg = ma_y \end{cases}$ $\underline{N = mg}$

$$\Rightarrow f_k = m a_{com} \rightarrow \mu_k \cancel{m} g = \cancel{m} a_{com} \rightarrow a_{com} = 2\ m/s^2$$

حرکت دورانی حول محور مرکز جرم $\tau = I\alpha \rightarrow -f_k R \sin 90 = (\frac{1}{2} m R^2)\alpha$

$$\Rightarrow -\mu_k \cancel{m} g = \frac{1}{2} \cancel{m} R \alpha \rightarrow -\frac{2}{10} \times 10 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10}\alpha$$

$$\alpha = -40\ rad/s^2$$

$v_{com} \cancel{=} R\omega$: شرط شروع غلتش بدون لغزش $v_{com} = R\omega$

$$v_{com} + a_{com} t = R(\omega_0 + \alpha t)$$

$$2t = \frac{1}{10}(40 - 40t) \rightarrow 2t = 4 - 4t \rightarrow \boxed{t = 1s}$$

PAPCO

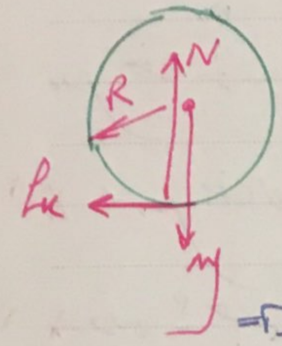
Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

endbook.net

مثال: گلوله‌ای توپُر به شعاع 10cm را با سرعت افقی 14 m/s بر روی سطح افقی پرتاب می‌کنیم چه مدت طول می‌کشد غلتش بدون لغزش آغاز می‌شود

$\mu_k = 0/2$



$$F = ma \begin{cases} F_x = m a_x \\ F_y = m a_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -f_k = m a_{com} \\ N - mg = m \overset{0}{a_y} \end{cases} \quad \boxed{N = mg}$$

$$\Rightarrow -\mu_k \cdot mg = m a_{com} \longrightarrow a_{com} = -2\ m/s^2$$

حرکت دورانی حول محور مرکز جرم

$$\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha} \Rightarrow f_k \cdot \cancel{R} \sin 90 = \frac{2}{5} m R^{\cancel{2}} \alpha$$

$$\Rightarrow +\mu_k \cdot \cancel{m}g = \frac{2}{5}\cancel{m} R \alpha \longrightarrow \frac{2}{10} \times 10 = \frac{2}{5}\alpha \frac{1}{10}\alpha \quad \boxed{\alpha = 50\ rad/s^2}$$

$\cancel{V_{com} = R\omega}$ در لحظه اول معتبر نیست چون حرکت غلتشی نداریم

$V_{com} = R\omega$ شرط شروع غلتش بدون لغزش / $V_{com} + a_{com} t = R(\omega_0 + \alpha t)$

$$\Rightarrow 14 - 2t = \frac{1}{10}(50 t) \longrightarrow 14 = 7t \longrightarrow \boxed{t = 2s}$$

Scanned by CamScanner

endbook.net

(نیروها)

قوانین نیوتن

۱- * اگر به جسمی نیرو وارد نشود جسم در حال سکون می ماند ، اگر در حال سکون باشه به حرکت روی خط راست با تندی ثابت ادامه می دهد . اگر در حال حرکت حرکت باشه ثابت ، دارای شود

۲- * نیروی خالص N وارد بر یک جسم به جرم m برشتاب a با رابطه $F=ma$ مربوط می شود

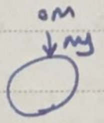
۳- * وقتی ۲ جسم با هم برهم کنش می کنند آن ۲ به یک دیگر نیرو وارد می کنند که همواره از لحاظ بزرگی برابر و از لحاظ جهت درخلاف یک دیگر (همانند عمل و عکس عمل)

$A \xrightarrow{F_{AB}}$ $\xleftarrow{F_{BA}} B$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

* نیرو وزن برابر است با جرم جسم ضرب در شتاب گرانشی و تکیه در سمت کره مرکز زمین

$$W = mg$$



نیروی کشش (D)

در واقع نیروی اصطکاک موجود در سیالات است

نیروی کشش خلاف حرکت نسبی جسم و شاره است

۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴

ضریب کشش زمین

چگالی شاره

$$D = \frac{1}{2} C \rho A v^2$$

سطح مقطع مرکز جسم

مساحت سطحی از جسم که برابر محدود است

تندی نسبی جسم و شاره

PAPCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

فصل ۱۴

دما، گرما و قانون اول ترمودینامیک !!!

قانون صفرم ترمودینامیک: اگر جسم A با جسم B در تعادل گرمایی باشند و جسم B نیز با جسم C در تعادل گرمایی باشند در نتیجه A با C در تعادل گرمایی هستند

$T = kV$
$T = kL$
$T = kR$
$T = kP$
⟵ کمیت دماسنجی (x)

$T = L(x)$ ⟸ $T = kx$ (k ثابت)

k را جوری تعیین بکنیم که اگر بر کمیت های دماسنجی ضرب شده باشند همه ی آنها برابر باشند

برحسب کلوین ⟸ $T = \frac{273.16}{x_3} x$

نقطه ی ۳ گانه ی آب :

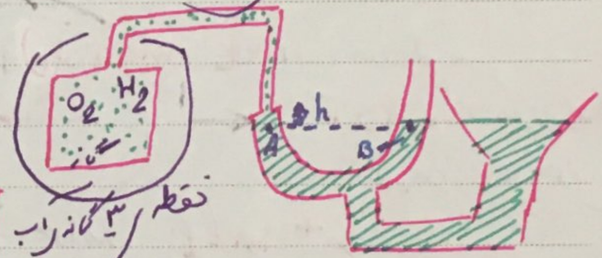
x_3: اندازه ی کمیت های دماسنجی در نقطه ی ۳ گانه آب

$273.16 = k \cdot x_3 \Rightarrow k = \frac{273.16}{x_3}$

x_3: کمیت دماسنجی در تماس با نقطه سه گانه آب

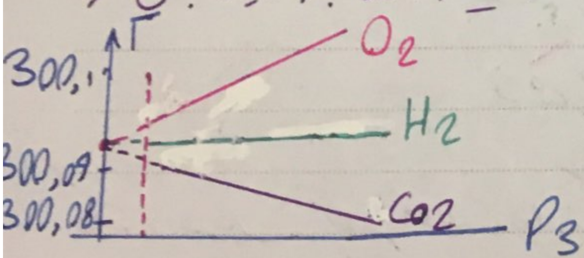
نکته: دماسنج گازی در حجم ثابت $x = P$ دماسنجی است که خطای کمتری دارد

$T = \frac{273.16}{P_3} \times P$ $\quad P_A = P_B$



$\Rightarrow P_{gas} + \rho g h = P_0 \rightarrow \boxed{P_{gas} = P_0 - \rho h g}$

* اگر گاز داخل مخزن دماسنج گازی در حجم ثابت بسیار رقیق باشد دیگر جنس گاز در دماسنجی تاثیر ندارد.



رفتار همه گازها هنگامی که بسیار رقیق هستند مشابه هم می باشند به همین علت هر گازی که بسیار رقیق باشد گاز کامل نامیده می شود.

PAPCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

$$T = \lim_{P_3 \to 0} \frac{273.16}{P_3} P$$

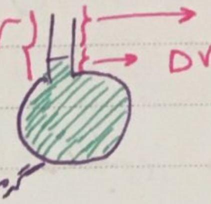
مقدار گاز ← ۰

انبساط جامدات:

$\Delta l = l_1 \alpha \Delta T$

$\Delta A = A_1 2\alpha \Delta T$ (ظرف)

$\Delta V = V_1 3\alpha \Delta T$ (واقعی مایع)



تغییر مقاومت با دما: $\Delta R = R_1 \alpha \Delta T$

معادله گاز کامل: $PV = nRT$ — به جنس گاز ربطی ندارد

انبساط مایعات: $\Delta V = V_1 \beta \Delta T$

در گاز کامل ضریب انبساط اصلاً نوع گاز ربطی ندارد ولی در جامد - مایع - متفاوت مهم است.

$$T_k = \theta(°C) + 273.15$$

$$\theta(°F) = \frac{9}{5}\theta(°C) + 32$$

گرمای ویژه $(J / kg K)$

ظرفیت گرمایی: $Q = C\Delta T$

گرما، کار

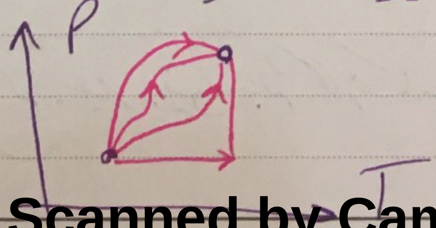
اگر گرما به اجسام:
- تغییر دما (حالت ثابت): $Q = mc\Delta T$ — گرمای ویژه $\frac{J}{kg°C}$ || $\frac{J}{kgK}$
- تغییر حالت (دما ثابت)

تعداد مول: $Q = n C_m \Delta T$ — ظرفیت گرمایی مولی

$$Q = \begin{cases} \pm mL_f & \text{جامد} \underset{-}{\overset{+}{\rightleftharpoons}} \text{مایع} \\ \pm mL_v & \text{مایع} \underset{-}{\overset{+}{\rightleftharpoons}} \text{گاز} \end{cases}$$

Q گاز:
- $Q = nC_{mv}\Delta T$ حجم ثابت
- $Q = nC_{mp}\Delta T$ فشار ثابت

نکته: در یک تغییر حالت معین گرما منحصر به فرد نبوده و به فرآیند طی شده بستگی دارد



* رفتار گرما مثل کار نیروی ناپایستار است و به مسیر بستگی دارد

PAPCO
Scanned by CamScanner

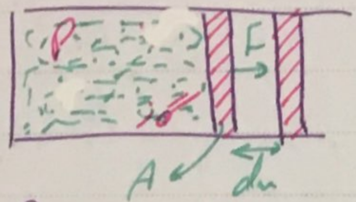
endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* کمیت کار، در یک تغییر حالت معین منحصر به فرد نبوده و به فرآیند طی شده بستگی دارد

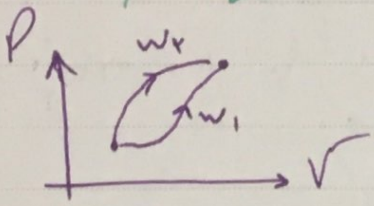
گاز

$P=\frac{F}{A}$



$$W=\int dw=\int F\,dx=\int PA\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{W=\int_1^2 P\,dV}$$



* قانون اول ترمودینامیک

از آن جایی که (Q-W) در یک تغییر حالت معین منحصر به فرد بوده و به فرآیند بستگی ندارد

و لذا مناسب است که کمیت حالتی به نام انرژی درونی معرفی کنیم که تغییرات آن برابر

(Q-W) می باشد

$$\Delta E_{int} = Q - W$$

تغییرات انرژی درونی ← گرما ← کار

$Q < 0$ گرما از دست بده — دستگاه روی محیط کار انجام داده $W > 0$

$Q > 0$ گرما بگیرد — محیط روی دستگاه کار انجام داده $W < 0$

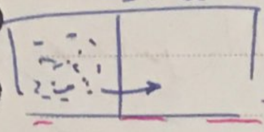
PAPCO

Scanned by CamScanner

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = nC_{mv} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

Subject: Year. Month. Date. ( )

فرآیندهای خاص

$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$	$\Delta E_{int} = nC_{mv}\Delta T$	$W = \int P dV$	Q	$PV = nRT$	
$\Delta S = nC_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$	$\Delta E_{int} = nC_{mv}\Delta T$	$W = 0$	$Q = nC_{mv}\Delta T$	$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ $V =$ ثابت	هم حجم
$\Delta S = nC_p \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$ با	$\Delta E_{int} = nC_{mv}\Delta T$ $\Delta E_{int} = nC_{mv}\Delta T - P\Delta V$	$W = P\Delta V$	$Q = nC_{mp}\Delta T$	$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ $P =$ ثابت	هم فشار
$\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$	0	$W = \int P dV = \int \frac{nRT}{V} dV$ $= nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V}$ $W = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$	$Q = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$ Ln	$P_1V_1 = P_2V_2$ $T =$ ثابت	هم دما
عایق گرمایی 	0	0	0	$T_1 = T_2$	انبساط آزاد
$\Delta S = 0$	$\Delta E_{int} = nC_{mv}\Delta T$	$W = \int P dV = \dots$	0	$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$ $PV^{\gamma} =$ ثابت	بی دررو

$\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$, هم فشار $\Delta S = nC_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$

$$C_p = C_v + R$$

endbook.net

PAPCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

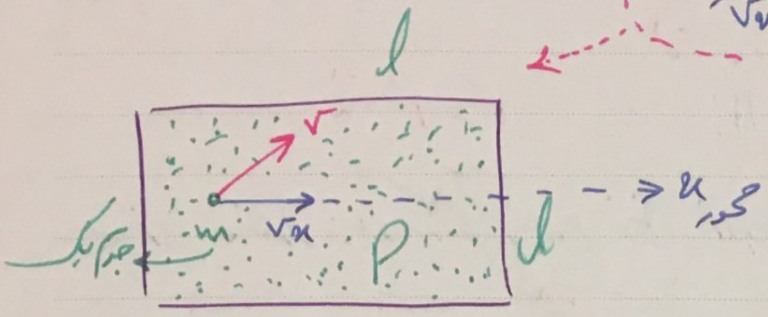
Subject:
Year. Month. Date.

$\Delta x = v_x t$

$l = v_x t$

زمان رفت $t = \frac{l}{v_x}$ $\Rightarrow$ زمان رفت و برگشت $t = \frac{2l}{v_x}$

"فشار گاز کامل"



$P_{ix} = m v_x$

$P_{fx} = -m v_x$

مولکول $\Delta P_x = -mv_x - mv_x = -2mv_x$ $\qquad$ کل P_x = ثابت

مولکول P_x + دیواره P_x = ثابت $\Rightarrow$ مولکول ΔP_x + دیواره $\Delta P_x = 0$

دیواره $\Delta P_x = -$ مولکول $\Delta P_x = 2mv_x$

زمان	تعداد برخورد
$\frac{2l}{v_x}$	1
1	?

* تعداد برخوردها در مدت ۱ ثانیه $= \frac{v_x}{2l}$

دیواره در مدت ۱ ثانیه $\Delta P_x = \cancel{2}mv_x \times \frac{v_x}{\cancel{2}l} = \frac{mv_x^2}{l}$

$$\Rightarrow F_x = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{\frac{mv_x^2}{l}}{1} = \frac{mv_x^2}{l}$$

کل $F_x = \frac{mv_x^2}{l} + \frac{mv_x^2}{l} + \cdots$

کل $F_x = \frac{m}{l}(v_x^2 + v_x^2 + \cdots)$

$$P = \frac{F_\perp}{A} = \frac{\frac{m}{l}(v_x^2 + v_x^2 + \cdots)}{l^2}$$

فشار $P = \frac{m}{l^3}(v_x^2 + v_x^2 + \cdots)$

N تعداد کل مولکول گازها $\qquad$ n_0 تعداد مولکول های گاز در واحد حجم

$$\frac{N}{l^3} = n_0 \Rightarrow l^3 = \frac{N}{n_0}$$

P4PCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$P = \frac{mn}{N}(v_1^2 + v_2^2 + \dots) \; ; \quad P = \rho \overline{v_x^2}$$

فرض ← تعداد زیاد حرکت و هیچ نقلی ندارد ← میانگین سرعت ها در ۳ راستا برابرند.

$$v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2 = v_1^2$$
$$v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2 = v_2^2$$
$$\vdots$$

$$\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \overline{v^2}$$

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$$

فشار گاز کامل $P = \frac{1}{3}\rho\overline{v^2}$ ⟸ به چگالی و سرعت گاز مورد نظر ربط دارد

$$\Rightarrow \overline{v^2} = \frac{3P}{\rho} \Rightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$$

P ← فشار گاز: Pa

ρ ← چگالی گاز: $\frac{kg}{m^3}$

سرعت متوسط مولکول گاز بر روش جذر میانگین مربعی (۱۳/۱)

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma PV}{mn}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

$PV = nRT$

$mn = M$ جرم کل

سرعت صوت در گازها

$$P = \frac{1}{3}\rho\overline{v^2} \quad \times V$$

ضرب در V حجم کل

دمای مطلق گاز کامل

$$PV = \frac{1}{3}\rho V \overline{v^2} \times \frac{3}{2}$$

$PV = nRT$ ، $\rho V = m'$ جرم کل گاز

$$\frac{3}{2}\frac{nRT}{n} = \frac{1}{2}\frac{m'\overline{v^2}}{n}$$

تقسیم بر n

M جرم مولی

ثابت بولتزمن

جرم یک مولکول

$$\frac{3}{2}\frac{RT}{N} = \frac{1}{2}\frac{M}{N_0}\overline{v^2} \Rightarrow \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv^2$$

N ← تعداد مولکول

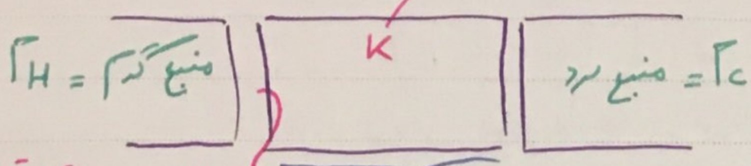
$$k = \frac{R}{N_0} = \frac{8/314}{6/02 \times 10^{23}} = 1/38 \times 10^{-23}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject :
Year . Month . Date . ( )

ضریب رسانندگی گرمایی



رسانش گرمایی

مساحت مقطع (m^2) A

طول رسانا (m)

مساحت مقطع رسانا (m^2)

$\left(\frac{W}{mK}\right)$ ، $\left(\frac{J}{s\,m\,K}\right)$ ، $\left(\frac{J}{s\,m\,{}^\circ C}\right)$ ضریب رسانندگی گرما

اختلاف دمای دو طرف رسانا $(K, {}^\circ C)$

آهنگ انتقال گرما ، $\frac{J}{s}$

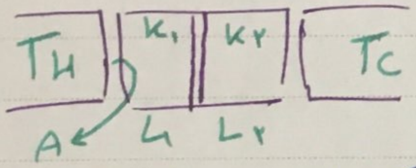
$$P = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{t} = \frac{KA(T_H - T_C)}{d}$$

d طول رسانا ، m

مثال : ۲ رسانای گرما مطابق شکل با یکدیگر به طور سری (متوالی) وصل شده‌اند و مجموعه‌ی آن‌ها بین ۲ منبع گرم و سرد با دمای T_H و T_C قرار گرفته است. با فرض این که انتقال گرما پایا می‌باشد مطلوبست آهنگ انتقال گرما برای کل این مجموعه و دمای محل اتصال ۲ رسانا به هم.

جسم در مسیر خود اتلاف ندارد یعنی در طول رسانا اتلاف نداریم

$T_x = ?$



چون پایاست $P = P_1 = P_2$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{k_1 A (T_H - T_x)}{L_1} \qquad P_2 = \frac{k_2 A (T_x - T_C)}{L_2}$$

$P_1 = P_2$

$$\frac{k_1 A (T_H - T_x)}{L_1} = \frac{k_2 A (T_x - T_C)}{L_2}$$

$$\Rightarrow k_1 L_2 T_H - k_1 L_2 A T_x = k_2 L_1 A T_x - k_2 A L_1 T_C$$

$$\Rightarrow k_1 L_2 T_H + k_2 L_1 T_C = T_x (k_2 L_1 + k_1 L_2)$$

$$\Rightarrow T_x = \frac{k_1 L_2 T_H + k_2 L_1 T_C}{k_2 L_1 + k_1 L_2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{k_1 A}{L_1}\left(\frac{k_2 L_1 T_H + \cancel{k_1 L_2 T_H} - \cancel{k_1 L_2 T_H} - k_2 L_1 T_H}{k_2 L_1 + k_1 L_2}\right)$$

endbook.net
Scanned by CamScanner

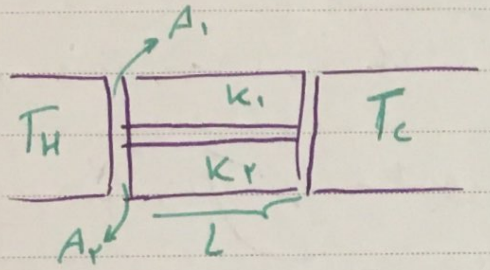
endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$P = \frac{KA}{\cancel{L_1}}\left(\frac{k_2 \cancel{L_1}(T_H - T_c)}{k_2 L_1 + k_1 L_2}\right)$$

$$\Rightarrow P = \frac{A(T_H - T_c)}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \cdots} \Rightarrow \| P = \frac{A(T_H - T_c)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{k_i}} \|$$

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}$$



$P_{کل} = P_1 + P_2$

|| رسانای موازی ||

||| نظریه جنبشی گازها |||

فرض های نظریه جنبشی گازها:

۱- تعداد مولکول های گاز بسیار زیاد است

۲- حرکت مولکول های گاز کاملاً نامنظم و تصادفی می باشد (کاتوره ای - Random ||

۳- برخورد مولکول ها باهم و یا با دیواره ی ظرف کشسان یا الاستیک می باشد

۴- نیروی بین مولکول های گاز بسیار ضعیف است

۵- زمان برخورد ها بسیار کوتاه است

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

endbook.net

دمای مطلق گاز کامل با انرژی جنبشی متوسط مولکول های آن گاز رابطه مستقیم دارد

"انرژی درونی گاز کامل"

$$E_{int} = K + U$$

چون خیلی کم است صرف نظر می شود

$$\Rightarrow E_{int} = \frac{3}{2} nRT$$ دمای مطلق گاز کامل

برای گازهای تک اتمی درست است

"ظرفیت گرمایی مولی در حجم ثابت C_{mv}"

فرآیند هم حجم $\Delta E_{int} = Q - W$

$$dE_{int} = nC_{mv}\,dT$$

$$\Delta E_{int} = nC_{mv}\Delta T$$

$$C_{mv} = \frac{1}{n}\frac{dE_{int}}{dT}$$

$$C_{mv} = \frac{1}{n}\times\frac{3}{2}nR = \frac{3}{2}R$$ فقط برای گاز تک اتمی درست است

$C_{mv} = \frac{1}{n}\frac{dE_{int}}{dT}$ $C_{mp} = C_{mv} + R$

گازهای تک اتمی	$E_{int} = \frac{3}{2}nRT$ $E_{int} = 3K = 3(\frac{1}{2}nRT)$ انتقالی	$C_{mv} = \frac{3}{2}R$	$C_{mp} = \frac{5}{2}R$	$\gamma = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = 5/3 = 1.7$
۲ اتمی	$E_{int} = \frac{5}{2}nRT$ $E_{int} = 3K + 2K = 5(\frac{1}{2}nRT)$ دورانی انتقالی	$C_{mv} = \frac{5}{2}R$	$C_{mp} = \frac{7}{2}R$	$\gamma = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} \simeq 1.4$
چند اتمی	$E_{int} = \frac{6}{2}nRT$ $E_{int} = 3K + 3K = 6(\frac{1}{2}nRT)$ دورانی انتقالی	$C_{mv} = \frac{6}{2}R$ $C_{mv} = \frac{7}{2}R$	$C_{mp} = \frac{8}{2}R$ $C_{mp} = \frac{9}{2}R$	$\gamma = \frac{\frac{8}{2}R}{\frac{6}{2}R} = \frac{4}{3} = 1.33$

نشان دهید در فرآیند بی دررو PV^{γ} = ثابت می ماند

$$\Delta E_{int} = -W \xRightarrow{d} dE_{int} = -dW \longrightarrow nC_{mv}\,dT = -P\,dV$$

$$n\,dT = \frac{-P\,dV}{C_{mv}}$$

$$PV = nRT \xrightarrow{d} V\,dP + P\,dV = nR\,dT$$

Scanned by CamScanner

endbook.net

$$PdV + VdP = R\left(\frac{-PdV}{C_{mV}}\right) \quad \to ndT$$

$$\gamma = \frac{C_{mP}}{C_{mV}}$$

$$\Rightarrow PdV\left(1 + \frac{R}{C_{mV}}\right) + VdP = 0$$

$$\Rightarrow (\gamma PdV + VdP = 0) \times \frac{1}{PV} \Rightarrow \int \gamma \frac{dV}{V} + \int \frac{dP}{P} = \int 0$$

$$\Rightarrow \gamma \ln V + \ln P = \text{ثابت} \Rightarrow \ln V^{\gamma} + \ln P = \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow \ln PV^{\gamma} = \text{ثابت} \quad ||| \; PV^{\gamma} = \text{ثابت} \; |||$$

$$||| \; P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma} \; |||$$

$$PV^{\gamma} = \text{ثابت} \longrightarrow P\left(\frac{nRT}{P}\right)^{\gamma} = \text{ثابت}$$

$$PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{P}$$

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$P^{1-\gamma} T^{\gamma} = \text{ثابت}$$

$$||| \; P_1^{1-\gamma} T_1^{\gamma} = P_2^{1-\gamma} T_2^{\gamma} \; |||$$

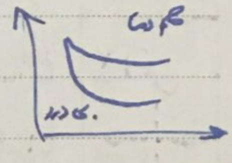
$$\frac{nRT}{V} \times V^{\gamma} = \text{ثابت}$$

$$T \times V^{\gamma - 1} = \text{ثابت}$$

$$||| \; T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \; |||$$

* همدما $PV = \text{ثابت} \longrightarrow P = \frac{\text{ثابت}}{V}$

* بی‌دررو $PV^{\gamma} = \text{ثابت} \longrightarrow P = \frac{\text{ثابت}}{V^{\gamma}}$



$$PV^{\gamma} = B \; \text{ثابت}$$

کار بی دررو

$$W = \int P dV \overset{\frac{B}{V^{\gamma}}}{=} \int B V^{-\gamma} dV = B \int_1^2 V^{-\gamma} dV = B \frac{1}{-\gamma+1} V^{-\gamma+1}$$

$$W = \frac{PV^{\gamma} V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} = \frac{PV}{1-\gamma}\Big]_1^2 \quad ||| \; \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{1-\gamma} \; |||$$

$$||| \; \Delta E_{int} = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{\gamma - 1} \; |||$$

$$||| \Rightarrow \Delta E_{int} = -W \; |||$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

endbook.net

آنتروپی و قانون دوم ترمودینامیک

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$$

ΔS = تغییر آنتروپی $(\frac{J}{K})$ یا $(\frac{cal}{K})$

T = دمای مطلق (K)

$$\Delta S = S_f - S_i$$

S_f = آنتروپی در حالت نهایی ، S_i = آنتروپی در حالت اولیه

* اگه تغییر آنتروپی کل مثبت باشه یعنی فرآیند قابل انجام می باشه ولی برعکس آن قابل انجام نیست و این فرآیندها یک سوی یک طرفه بازگشت ناپذیر گویند

مثال: یک رسانای گرما بین ۲ منبع گرم و سرد با دمای ۱۲۷°C و ۲۷°C قرار گرفته است اگر در مدت 2min مقدار 1200J گرما به طور پایا از منبع گرم به منبع سرد منتقل شود مطلوبست تغییر آنتروپی منبع گرم و تغییر آنتروپی منبع سرد و تغییر آنتروپی رسانای گرما و گرمای آنتروپی کل در این مدت 2min

$$\Delta S_{\text{منبع گرم}} = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_H}\int dQ = \frac{Q}{T_H} = \frac{-1200}{400} = -3\ J/K$$

$$\Delta S_{\text{منبع سرد}} = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_C}\int dQ = \frac{Q}{T_C} = \frac{1200}{300} = +4\ J/K$$

$$\Delta S_{\text{رسانای گرما}} = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{0}{T} = 0 \qquad \Delta S_{\text{کل}} = 1\ J/K > 0$$

* الان می گیریم چون دما در نقاط مختلف فرق می کنه ولی گرمایی که عبور می کنه فرقی نمی کنه

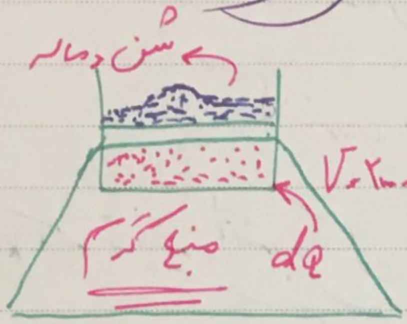
* اگه تغییر آنتروپی کل در فرآیندی برابر صفر باشه آن فرآیند را بازگشت پذیر می گوییم یعنی هم خود فرآیند و هم معکوس آن قابل انجام می باشه

Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: حجم ۲mol گاز کامل را با یک فرآیند هم دما ۲ برابر می کنیم. مطلوبست
تغییر آنتروپی گاز، تغییر آنتروپی منبع گرم و تغییر آنتروپی کل



گاز: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int dQ = \frac{Q}{T}$

$= \frac{W}{T} = \frac{nR\cancel{T} Ln(\frac{V_f}{V_i})}{\cancel{T}} = nR Ln(\frac{V_f}{V_i})$

||| هم دما $\Delta S = nR Ln(\frac{V_f}{V_i})$ |||

$\Rightarrow 2 \times 8.314 \times Ln2 \longrightarrow 16.628\, Ln2\ J/K > 0$

یا $2 \times 2\, Ln2 = 4\, Ln2\ cal/K > 0$. $R = 8.314 \frac{J}{mol\,K} = \frac{2\,cal}{mol\,K}$

منبع گرم $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int dQ = \frac{Q}{T} = \frac{-nRT Ln(\frac{V_f}{V_i})}{T} = -2 \times 2\, Ln2 = -4\, Ln2$

کل $\Delta S = 4Ln2 - 4Ln2 = \boxed{0}$ فرآیند بازگشت پذیر باشد

* اگر تغییر آنتروپی کل منفی باشد یعنی آن فرآیند قابل انجام نمی باشد

آنتروپی یک کمیت حالت است

$\Delta E_{int} = Q - W \qquad dE_{int} = dQ - dW$

$dQ = dE_{int} + dW = nC_V dT + p\,dV \qquad \Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{nC_V dT + P dV}{T} = \int \frac{\frac{nR\cancel{T}}{V} dV}{\cancel{T}}$

$= nC_V Ln(\frac{T_f}{T_i}) + nR Ln(\frac{V_f}{V_i})$

هم فشار $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{nC_p dT}{T} = nC_p Ln(\frac{T_f}{T_i})$

PAPCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

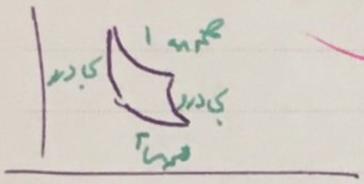
$$Q_H = Q_C + W$$

اما ماشین گرمایی

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}$$

ماشین گرمایی کارنو $\eta_{max} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$

قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی



$$\Delta S = \int_{\text{جسم دمای ۱}} \frac{dQ}{T} + \int_{\text{جسم دمای ۲}} \frac{dQ}{T}$$

$$= \frac{Q_H}{T_H} + \frac{-Q_C}{T_C} = 0 \longrightarrow \frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_C}{T_C} \rightarrow Q_H > Q_C$$

غیر ممکن است که به صفر برسد ← Q_C

ماشین گرمایی ایده‌آل وجود ندارد ←

یعنی هیچ ماشین گرمایی وجود ندارد که طی یک چرخه متوالی تمام
گرما را کاملاً به کار تبدیل کند

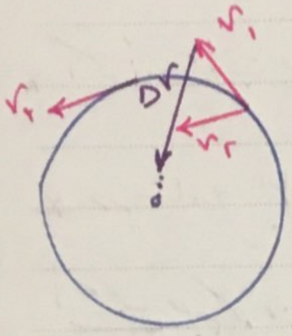
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین ۱ جلسه‌ی اول «فیزیک !»

* در حرکت دایره‌ای یکنواخت ω ثابت است $\vec{V} = r.\omega$ سرعت خطی
ثابت ⟵ ثابت ، ← مقدار V نیز ثابت است



* چون جهت سرعت تغییر می‌کند شتابی بوجود می‌آید به نام شتاب رو به مرکز.

$a = v^2/R$

* هرچقدر در حرکت دایره‌ای شعاع دایره کوچکتر باشد شتاب مرکزگرا بیشتر می‌شود زیرا تغییر جهت سرعت شدیدتر است.

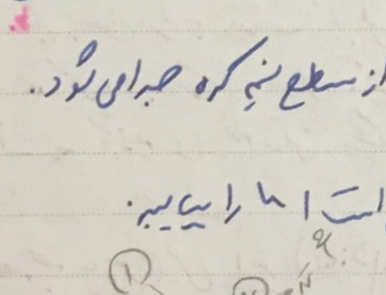
* هرچقدر در حرکت دایره‌ای سرعت بیشتر باشد شتاب مرکزگرا بیشتر می‌شود زیرا تغییر جهت سرعت بیشتر می‌شود.

* در حرکت دایره‌ای هرچقدر سرعت جسم بیشتر باشد میل گریز از مرکز بیشتر است.

* نیروی گریز از مرکز وجود ندارد و ساخته‌ی دست خودمان است.

* نیرویی را که در شکل دایره‌ای جهتش به سمت مرکز می‌باشد را می‌توانیم در شکل نیروی مرکزگرا بنامیم

مسئله: مکعب بسیار کوچکی از بالای نیم کره‌ای با شعاع R با سرعت اولیه ناچیزی شروع به حرکت می‌کند. این مکعب در چه ارتفاعی نسبت به پایین نیم کره از سطح نیم کره جدا می‌شود. (اصطکاک مکعب با نیم کره ناچیز و نیم کره سفت روی زمین است) h را بیابید.



* نیروی عمودی تکیه‌گاه همواره عمود بر سطح و به طرف جسم می‌باشد و بزرگی آن به میزان تکیه‌ی جسم به سطح بستگی دارد. *

$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\sin\theta$

(1) $v^2 = 2Rg(1-\sin\theta)$

$F_n = ma_n \rightarrow mg\sin\theta - N = mv^2/R$ (2)

لحظه‌ی جدایش $N=0 \rightarrow mg\sin\theta = mv^2/R \rightarrow v^2 = Rg\sin\theta$

$(1),(2) \rightarrow 2Rg(1-\sin\theta) = Rg\sin\theta \rightarrow 2 = 3\sin\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{2}{3}$

$h = R\sin\theta = R\times\frac{2}{3} = \frac{2}{3}R$

PAPCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

"نکات"

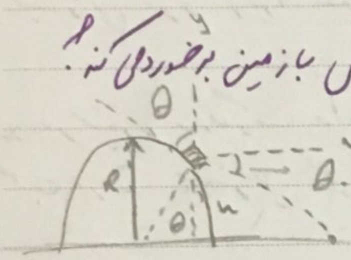
* شتاب مرکزگرا به دلیل تغییر جهت $\vec{V}$ به وجود آمده.

* شتاب مماسی به علت تغییر اندازه‌ی سرعت خطی $\vec{V}$ به وجود آمد.

* اگر V ثابت باشد شتاب مماسی نداریم.

* در مسئله‌ی قبل فاصله‌ی برخورد مکعب با زمین تا مرکز نیم کره را بدست آورید

کمک ← جسم که از سطح جدا شده حرکت پرتابه خواهد داشت در چه فاصله‌ای با زمین برخورد می‌کند؟



$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \theta$ $\qquad y = \frac{-gx^2}{2V_0^2\cos^2\theta_0} + \tan\theta_0\, x$

$\sin\theta = \frac{2}{3}$

$\cot\theta_0 = \frac{\sqrt{1-\frac{4}{9}}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{\sqrt5}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt5}{2}$

$x = ?$

$y = -\frac{2}{3}R$

$\frac{2}{3}R = \frac{+gx^2}{2(\frac{2}{3}Rg)\underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{4}{9}}} + \cot\theta\, x \rightarrow \frac{27}{16R}x^2 + \frac{\sqrt5}{2}x - \frac{2}{3}R = 0$

$x = \frac{-\frac{\sqrt5}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} + 4\times\frac{2}{3}\times\frac{27}{16R}R^2}}{\frac{27}{8R}} = \frac{\frac{\sqrt{23}}{2} - \frac{\sqrt5}{2}}{\frac{27}{8R}} \Rightarrow x = \frac{(\sqrt{23}-\sqrt5)4R}{27}$

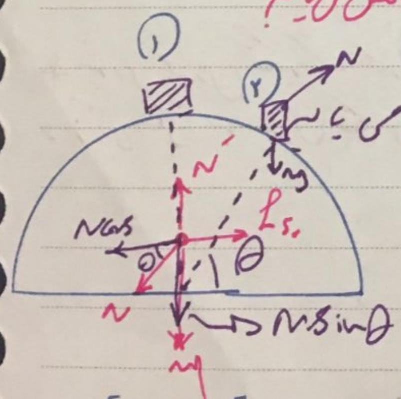
کل فاصله $\frac{\sqrt5}{3}R + \frac{(\sqrt{23}-\sqrt5)4R}{27}$

* اگر نیم کره دارای جرم M بوده و به زمین چسبیده باشد نیروی اصطکاک ایستایی بین نیم کره و سطح زمین را به صورت تابعی از θ بدست آورید با فرض این که مکعب به نیم کره نیرو وارد می‌کند اما نیم کره به حرکت در نمی‌آید (تا لحظه‌ی قبل از جدا شدن مکعب).

کمک ← تجزیه‌ی N دقیق عکس عمل آن به سمت مرکز است و باید تجزیه‌ی نیروی وارد شده.

* هر چه پایین می‌آید $mg\sin\theta$ بیشتر می‌گردد چون θ کاهش می‌یابد.

* هر چه پایین می‌آید سرعت $\vec{V}$ افزایش در نتیجه N کاهش می‌یابد.



$F_{x} = N\cos\theta = f_{(s)} = Ma_x \rightarrow f_{(s)} = N\cos\theta$

$f_{(s)} = (mg\sin\theta - \frac{mv^2}{R})\cos\theta$

$E_1 = E_2 \rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

$\Rightarrow f_{(s)} = m(g\sin\theta - 2g + 2g\sin\theta)\cos\theta$

$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\sin \rightarrow v^2 = 2Rg(1-\sin\theta)$

$f_{(s)} = mg(\ldots)\cos\theta$

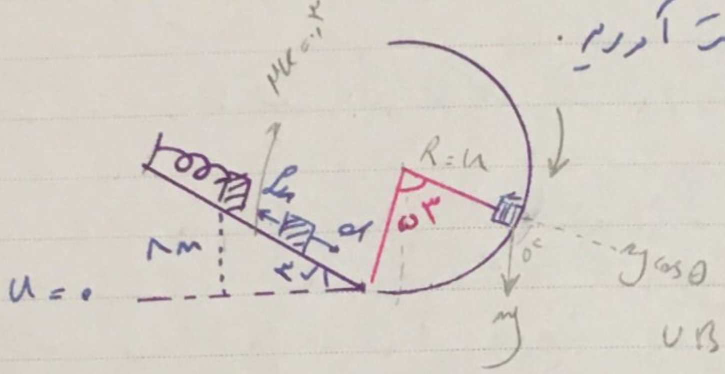
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

* در شکل مقابل مکعب کوچکی به جرم ۴۰۰gr / فنری با ثابت $K=750\,N/m$ را ۴۰cm متراکم کرده است در یک لحظه مکعب را رها می‌کنیم تا به طرف پایین شروع به حرکت کند ضریب اصطکاک جنبشی بین مکعب و سطح شیب‌دار $\mu_k=0.3$ و قسمت دایره‌ای بدون اصطکاک می‌باشد نیروی عمودی تکیه‌گاه را در نقطه B بدست آورید.



$$\Delta E_{mec} = W_{f_k}$$

$$E_B - E_A = f_k\, d \cos 180$$

$$U_B + K_B - (U_A + K_A) = \mu_k . mg \cos 37 \times d \times (-1)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 + mg\frac{72}{10} - \left(mg \times 8 + \frac{1}{2}\frac{K}{m}x^2\right) = \frac{3}{10}\times 10 \times \frac{8}{10} \times \frac{80}{6}(-1)$$

$$\frac{1}{2} v_B^2 + 72 - 80 - \frac{1}{2}\,\frac{7500}{4} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = -32$$

$$\frac{1}{2} v_B^2 = -32 + 80 - 72 + 114 \longrightarrow v_B^2 = 180$$

$$N - mg\cos 53 = \frac{mv^2}{R} \longrightarrow N = mg\cos 53 + \frac{m v_B^2}{R} = \frac{4}{10}\times 10 \times \frac{6}{10} + \frac{4}{10}\times\frac{180}{18}$$

$$= 2.4 + 4 = \boxed{6.4}$$

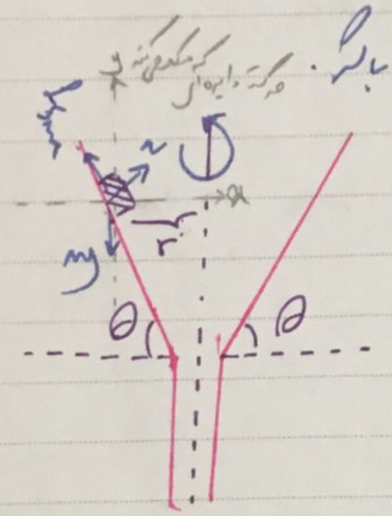
endbook.net

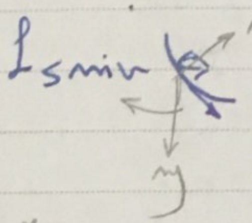
Scanned by CamScanner

endbook.net

«مسئله بسیار مهم و ارزشمند»

مکعب بسیار کوچکی بر روی دیواره‌ی داخلی قیف قرار دارد و فاصله‌ی مکعب تا محور قیف r می‌باشد و دیواره‌های قیف با افق زاویه‌ی θ را می‌سازند و ضریب اصطکاک ایستایی بین مکعب و دیواره‌ی قیف μ_s می‌باشد و قیف حول محور قائم دوران کند حداقل و حداکثر بسامد f چقدر باشد تا مکعب نسبت به قیف ساکن باشد.



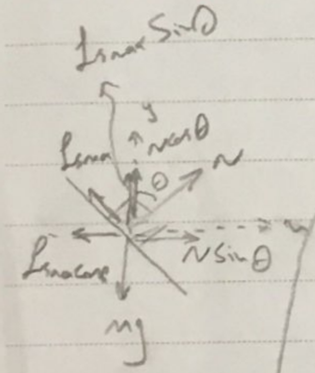


* سرعت که بیشتر می‌شود نیروی گریز از مرکز یعنی N نیروی عمودی تکیه‌گاه بیشتر می‌شود و با زیاد شدن N، f_s نیز بیشتر می‌شود که بیشتر شود سرعت حرکت کند تر می‌شود

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$f = \frac{1}{T}$

* نیروی عمودی تکیه‌گاه فرمول معینی ندارد و بسته به شرایط هر مسئله با برقراری روابط نیروی عمودی تکیه‌گاه را پیدا کرد.



$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N\sin\theta - f_{s\max}\cos\theta = mr\omega^2 \\ N\cos\theta + f_{s\max}\sin\theta - mg = ma_y = 0 \end{cases}$$

$$N(\cos\theta \mp \mu_s\sin\theta) = mg \rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta \mp \mu_s\sin\theta}$$

$$N(\sin\theta \pm \mu_s\cos\theta) = mr(2\pi f)^2 \longrightarrow \frac{mg(\sin\theta \pm \mu\cos\theta)}{\cos\theta \mp \mu_s\sin\theta} = m(2\pi)^2 f^2 r$$

$$f_{\substack{\min \\ \max}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}\,\frac{\sin\theta \pm \mu_s\cos\theta}{\cos\theta \mp \mu_s\sin\theta}}$$

$$f_{\min} \leq f \leq f_{\max}$$

PAPCO

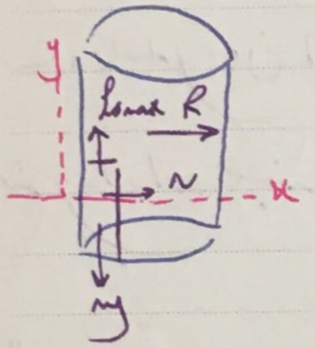
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه دوم

شخصی به جرم 80kg داخل یک استوانه قائم به شعاع 4m و مماس با سطح داخلی آن ایستاده است و استوانه می‌تواند حول محور خود دوران کند «بچرخد» حداقل سرعت زاویه‌ای استوانه چقدر باید باشد تا اگر زیر پای شخص خالی شود شخص سقوط نکند. ضریب اصطکاک ایستایی بین شخص و دیواره‌ی داخلی استوانه ۰/۴ می‌باشد



$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = mR\omega_{max}^2 \\ f_{smax} - mg = ma_y \end{cases}$$

$$f_{smax} = mg$$

$$\Rightarrow \mu_s . N = mg \xrightarrow{N = mR\omega^2} \mu_s \cancel{m} R\omega^2 = \cancel{m}g$$

$$\Rightarrow \omega_{max}^2 = \frac{g}{\mu_s . R} = \frac{10 \times 10}{4 \times 4} = \frac{10}{4} = \boxed{2{,}5\ \frac{rad}{s}}$$

* نیروی عمودی تکیه‌گاه فرمول مشخص ندارد.

* اگر امگا افزایش یابد جسم محکم‌تر به دیواره تکیه می‌دهد و بالا نمی‌رود.

* اصطکاک هیچ وقت از نیرویی که به آن وارد می‌شود (mg) نمی‌تواند بیشتر شود

* با افزایش امگا f_{max} رشد می‌کند در نتیجه چون بیشتر از mg نمی‌تواند باشد می‌شود

f_s می‌شود در نتیجه چون در استوانه حرکت قرار نمی‌گیرد نمی‌تواند به سمت بالا حرکت کند.

PAPCO

Scanned by CamScanner

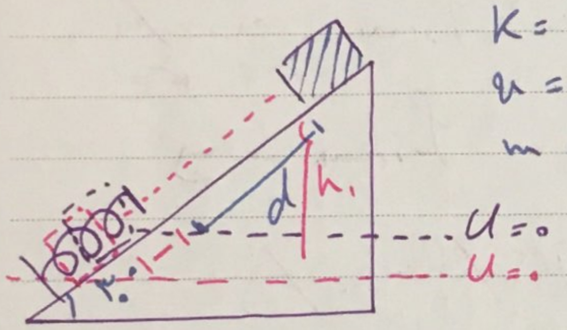
endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* در شکل مقابل قطعه ای به جرم ۲kg روی سطح بدون اصطکاک از حالت سکون شروع به لغزیدن می کند و پس از طی مسافت d به فنری با ثابت $k = 400\,N/m$ برخورد می کند وقتی قطعه به توقف لحظه ای می رسد فنر را به اندازه ی ۲۰cm فشرده می کند

الف) مسافت d ؟

ب) فاصله ی میان اولین نقطه ی تماس قطعه با فنر و نقطه ای که در آن جا قطعه بیشترین تندی را دارد چقدر است.



$k = 400\,N/m$

$x = 20\,cm$

$m = 2\,kg$

الف)

$E_1 = E_2$

$\cancel{K_1} + U_1 = \cancel{K_2} + U_2$

$0 + mgh_1 = \frac{1}{2}kx^2$

$\Rightarrow 2 \times 10 \times h_1 = \frac{1}{2} \times 400 \times \left(\frac{2}{10}\right)^2$

$\Rightarrow h = \frac{4}{10}\,m = 40\,cm$

طبق مثلث قائم الزاویه $d + x = 0.8\,m - 0.2 = \boxed{0.6}$

تراکم فنر

ب)

$mg\sin\theta = kx$

$2 \times 10 \times \frac{1}{2} = 400x \rightarrow x = \frac{1}{40} = \boxed{2.5\,cm}$

$mg\sin\theta - kx = ma$ ← لحظه ی max شتاب صفر

$E_1 = E_2 \rightarrow K_1 + U_1 \rightarrow K_2 + U_2$

$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$= 2 \times 10 \times \frac{31.25}{100} = \frac{1}{2} \times 2 \times v_{max}^2 + \frac{1}{2} \times 400 \left(\frac{25 \times 25}{1000 \times 1000}\right) \rightarrow 6.25 = v^2 = \frac{25}{c}$

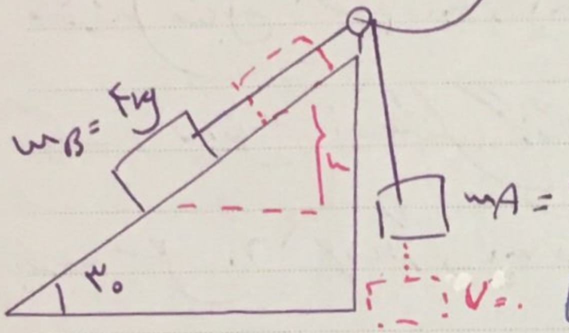
PAPCO

Scanned by CamScanner

$v^2 = 6.25 - 0.125$

endbook.net

۳) وزنه‌ی a و b مطابق شکل توسط نخ بدون جرمی که از روی قرقره‌ای بدون جرم گذشته - به هم متصل اند اگر دستگاه را از حال سکون رها کنیم تا وزنه‌ی b ، ۵۰ سانتی متر روی سطح شیب دار حرکت کند سرعت دو جرم در انتهای مسافت پیموده شده را به دست آورید



$\mu_k = \frac{\sqrt{3}}{6} \,/\, 25 = \frac{\sqrt{3}}{5}$

$\Delta E_{mec} = W_{f_k}$

$E_2 - E_1 = f_k d \cos\alpha$

$\Rightarrow K_2 + U_2 - (K_1 + U_1) = \mu_k mg \cos 30 \times d \times (-1)$

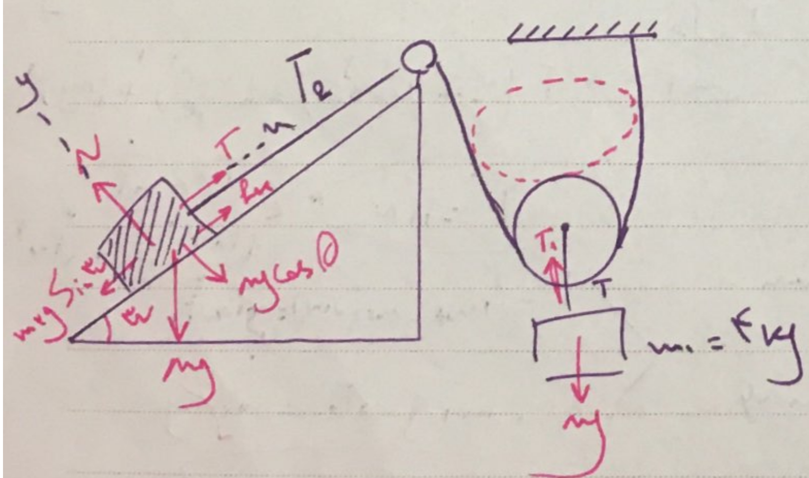
$\Rightarrow \frac{1}{2}(m_A + m_B)V^2 + m_B g \times \frac{1}{2} - (m_A g \times \frac{5}{10}) = \frac{\sqrt{3}}{5} \times \frac{5}{10} (-1)$

$4V^2 + 10 - 20 = -5 \rightarrow 5V^2 = 15 \rightarrow V^2 = 3 \rightarrow \boxed{V = \sqrt{3}\, m/s}$

۴) در شکل مقابل قرقره و ریسمان ها سبک هستند و وزنه‌ها در حال حرکت هستند زاویه‌ی سطح با افق ۳۷ و $\mu_k = 0.25$ بین m_2 و سطح شیب دار می‌باشد. مطلوبست.

الف) شتاب هر یک از وزنه‌ها

ب) نیروی کشش T_1 و T_2



$m_2 g \sin 37 - f_k - T_2 = m_2 a_2$

① $m_2 g \sin 37 - \mu_k m_2 g \cos 37 - T_2 = m_2 a_2$

② $T_1 - mg = m_1 a_1$

③ $2T_2 - T_1 = m_{قرقره}\, a \rightarrow T_2 = \frac{T_1}{2}$

$\Rightarrow \{ 2m_2 g \sin 37 - 2\mu_k m_2 g \cos 37 - mg =$

$(4m_2 + \ldots$

④ $\Delta x_{m_2} = 2\Delta x_1 \rightarrow a_2 = 2a_1$

P4PCO

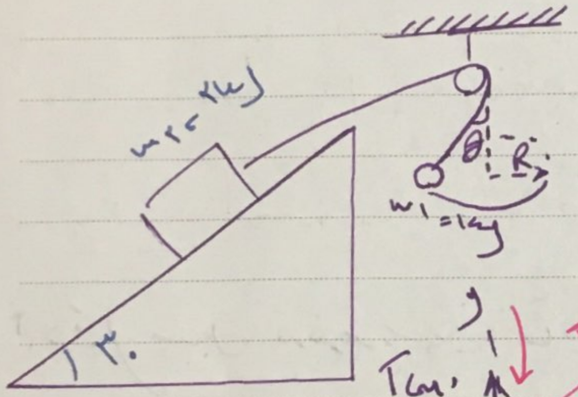
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* در حل این گونه مسائل که ارتفاع ها تغییر نکرده و سرعت ها یکسان است بایستی از تجزیه ی نیرو و قانون دوم نیوتن استفاده کرده و مجهول ها را بدست آورد.

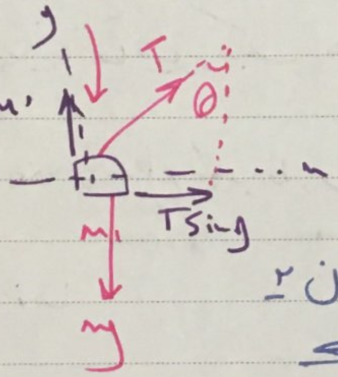
* در شکل مقابل ۲ جسم m_1 و m_2 توسط ریسمان سبکی که از روی قرقره ی سبک و بدون اصطکاکی گذشته به هم متصل اند. m_1 در حال حرکت دایره ای یکنواخت با سرعت خطی $2\,m/s$ می باشد و m_2 در آستانه ی حرکت به طرف بالا قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی بین m_2 و سطح شیب دار را بدست آورید.



$R = \frac{4}{\sqrt{21}}\,m$ / $v = 2\,m/s$

$\mu_s = ?$

$m = 1kg$



$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases}$ $\begin{cases} T\sin\theta = \frac{mv^2}{R} \\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$

$T\cos = mg$

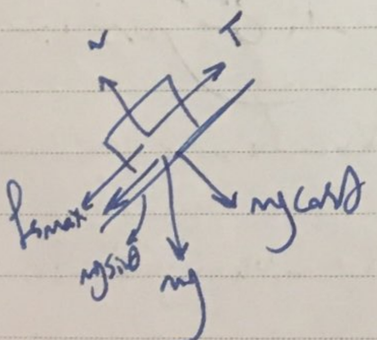
توان ۲

$\Rightarrow T^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2 + (mg)^2$

$T = \sqrt{\left(\frac{1\times(2)^2}{\frac{4}{\sqrt{21}}}\right)^2 + (10)^2}$

$T = \sqrt{121}$

$T = 11\,N$



m_2 $\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases}$ $\begin{cases} T - f_{s\,max} - m_2 g\sin\theta = m_2 a_x = 0 \\ N - m_2 g\cos 30 = m_2 a_y = 0 \end{cases}$

$\boxed{N = m_2 g\cos 30}$

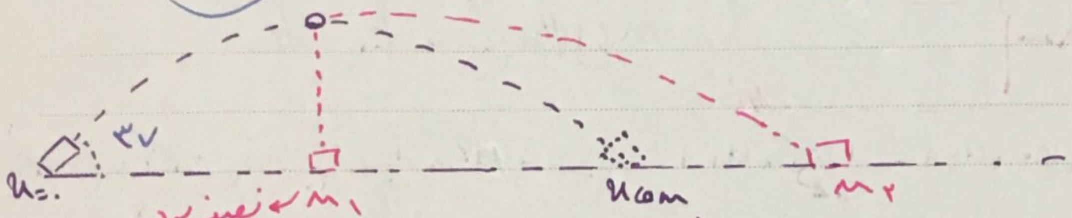
$\Rightarrow 11 - \mu_s \times 2 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\times 10 \times \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \mu_s = \frac{1}{10\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{30}}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* گلوله‌ای به جرم ۴۰۰g را با سرعت اولیه‌ی ۱۰m/s و تحت زاویه‌ی °۳۷ از سطح زمین به طرف بالا پرتاب می‌کنیم هنگامی که گلوله به نقطه‌ی اوج خودش رسید انفجاری رخ داده و به ۲ قطعه‌ی m_1 و m_2 شکسته می‌شود اگر $m_2 = \frac{1}{3} m_1$ باشد و m_1 بعد از انفجار در راستای قائم سقوط کند m_2 در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی پرتاب برخورد با زمین می‌کند.



برد
← اگر منفجر نمی‌شد این جا برخورد می‌کرد.

$$x_{com} = \frac{m_1 \left(\frac{R}{2}\right) + \frac{1}{3} m_1 x_2}{m_1 + \frac{1}{3} m_1}$$

R ←

$$\Rightarrow \frac{\frac{R}{2} + \frac{x_2}{3}}{\frac{4}{3}} = R \Rightarrow \frac{R}{2} + \frac{x_2}{3} = \frac{4}{3} R$$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{3} = \frac{4}{3} R - \frac{R}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2} R$$

$$x_2 = \frac{5}{2} \times \frac{(10) \times \left(\frac{24}{100}\right)}{20} = \frac{9}{2} = 4.5$$

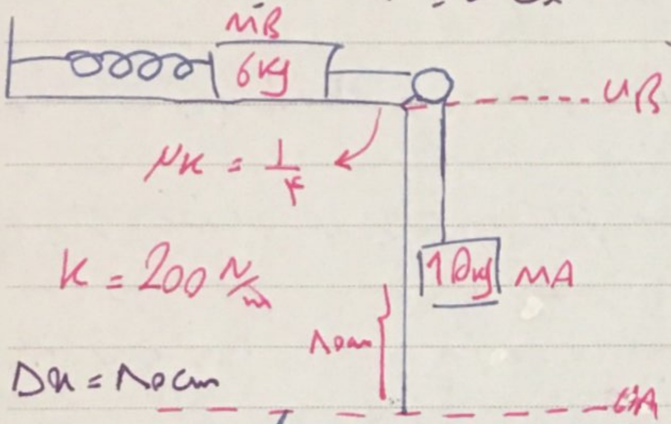
$v_0^2 \times \sin 2\theta$ — x_2 — $2g$

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حلهای سوم

در شکل مقابل وزنه‌ها را از حال سکون رها می‌کنیم و فنر در ابتدا در حالت آزاد می‌باشد (در حالت طبیعی)
سرعت هر یک از وزنه‌ها را هنگامی که وزنه A ، ۸۰cm پایین می‌آید بدست آورید.



سطح زیر A را مبنا در نظر گرفته‌ایم

$$W_{fk} = \Delta E_{mec}$$

$$m_B g \mu_k d = E_2 - E_1$$

$$-m_B g \mu_k d = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) \Rightarrow -60 \times \frac{1}{4} \times \frac{8}{10} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} k x^2 - (m_A g h_A)$$

$$\Rightarrow -12 = 5v^2 + 3v^2 + \frac{1}{2} \times 200 \times \frac{8}{10} \times \frac{8}{10} - (10 \times 10 \times \frac{8}{10})$$

$$\Rightarrow 8v^2 + 64 - 80 = -12 \longrightarrow 8v^2 = 4 \longrightarrow v = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

به تعداد جسم‌ها می‌توانیم مبنا بگیریم ---- می‌توانیم $W_{fk} = \Delta E_{mecB}$ و $W_{fk} = \Delta E_{mecA}$ بنویسیم چون

A و B به هم مرتبط‌اند به هم اثر وارد می‌کنند و می‌توان نوشت $E_{1A} = E_{2A}$ نوشت چون که مقداری

از انرژی پتانسیل که از دست می‌دهند به جنبشی تبدیل می‌شود به B و می‌دهد.

از دینامیک نمی‌توان رفت چون شتاب هر لحظه فرق می‌کند چون نیروی فنر متغیر است

و به این دلیل روابط حرکت با شتاب ثابت نمی‌توان حل کرد

PAPCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جمیده جرم 80kg به اتفاق سعیده که از گفتن جرمش خودداری می کند روی یک قایق 30kg به

به قایق رانی مشغول هستند وقتی که قایق در آب آرام در حال سکون است این ۲ نفر که جایشان

را که به فاصله 3m از هم قرار دارند و نسبت به مرکز قایق متقارن است با هم عوض می کنند جمیده

متوجه می شود که قایق به اندازه‌ی 0,4m نسبت به اسکله غوطه ور در آب حرکت کرده است

① m_1 80kg جمیده — سعیده $m_2 = ?$ — m_3 30kg — $d = 0,4m$

جمیده با توجه به این موضوع جرم سعیده را می برد که جرم سعیده چقدر است

جمیده $m >$ سعیده m «از اصطکاک قایق با آب صرف نظر کنید»

$Ma_{com} = F_{ext}$ — مرکز جرم با سرعت صفر است پس، بعد از جابجایی مرکز جرم نیز ثابت است

مرکز جرم کل جابجا نمی شود ولی مرکز جرم قایق عوض می شود

$(80+30+m_2)\,a_{com} = 0 \longrightarrow a_{com} = 0 \longrightarrow V_{com} =$ ثابت

در لحظه اول $V = \dfrac{m_1\cancel{v_1} + m_2\cancel{v_2} + m_3\cancel{v_3}}{m_1+m_2+m_3} = 0 \longrightarrow V_{com} = 0 \longrightarrow x_{com}$ ثابت

در حالت اول $x_{com} =$ در حالت دوم x_{com} — در حالت انتقال می توانیم هر نقطه روی مکان قایق را بگیریم

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{m_1x_1' + m_2x_2' + m_3x_3'}{m_1+m_2+m_3}$$

$$(80\times 0) + (m_2\times 3) + (30\times 0) = 80(\underbrace{\cancel{3-d}}_{2,6}) + m_2(-0,4) + 30(-0,4)$$

$$d = 0,4 \Rightarrow 3,4\,m_2 = 196 \rightarrow \boxed{m_2 = 57,6}$$

Scanned by CamScanner

* ۲- جسم ۲kg ، A و B به هم برخورد می‌کنند سرعت‌های قبل برخورد $\vec{V_A} = 15\vec{i} + 30\vec{j}$

$\vec{V_B} = 10\vec{i} + 5\vec{j}$ بر حسب m/s بعد از برخورد سرعت نهایی A ، $\vec{V_A'} = -5\vec{i} + 20\vec{j}$

می‌باشد الف) سرعت نهایی جسم B ب) تغییر انرژی جنبشی کل را بیابید

در برخورد کشسان یک بعدی اگر $m_B = m_A$ سرعت‌ها عوض می‌شوند فقط $m_A = m_B$

$$P_i = P_f \longrightarrow \cancel{m_A} V_A + \cancel{m_B} V_B = \cancel{m_A} V_A' + \cancel{m_B} V_B'$$

$$\Rightarrow 15i + 30j + 10i + 5j = -5i + 20j + V_B'$$

$$\Rightarrow \vec{V_B'} = 10i + 15j$$

$$K_i = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2 = (15^2 + 30^2) + (10^2 + 5^2)$$

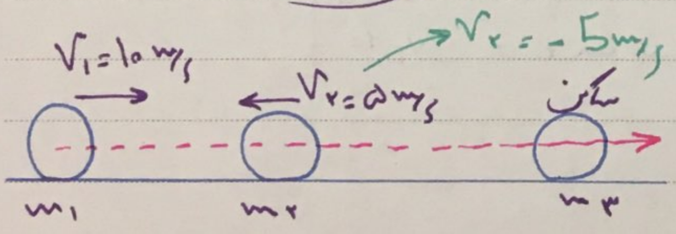
$$K_f = \frac{1}{2} m_A V_A'^2 + \frac{1}{2} m_B V_B'^2 = (5^2 + 20^2) + (10^2 + 15^2)$$

$$\Rightarrow K_i \neq K_f \longrightarrow K_f < K_i \qquad K_f - K_i = 20^2 - 30^2 = -500 J$$

برخورد ناکشسان است. سرعت پایانی اگر یکسان بود یعنی ۲ جسم یکسان می‌شدند برخورد کاملاً ناکشسان

* ۴- تیله‌ی شیشه‌ای مطابق شکل دارای جرم‌های $m_1 = 10\,gr$ ، $m_2 = m_3 = 20\,gr$ می‌باشند

با توجه به شکل سرعت نهایی ۳ تیله را پس از تمامی برخوردهای ممکن بدست آورید تمامی برخوردها کشسان یک بعدی می‌باشد



endbook.net
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$m_1=m_2$, $P_i=P_f \longrightarrow m_1V_1+m_2V_2=m_1V_1'+m_2V_2'$

$\Rightarrow 10^{-1}\times10+2\times10^{-2}\times(-5)=10^{-1}V_1'+2\times10^{-2}V_2'$

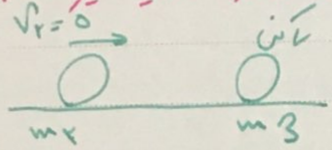
$10-10=V_1'+2V_2' \Rightarrow V_1'=-2V_2'$ $\quad (V_1')^2=4(V_2')^2$

$K_i=K_f \Rightarrow \frac{1}{2}\times10\times100+\frac{1}{2}\times20\times25=\frac{1}{2}\times10\times(V_1')^2+\frac{1}{2}\times20\times(V_2')^2$

$100+50=(V_1')^2+2(V_2')^2 \Rightarrow 150=4(V_2')^2+2(V_2')^2$

$\Rightarrow (V_2')^2=25 \quad V_2'=\pm5 \quad V_1'=-10$

۵- غلط چون نیرو وارد نشده و باید تغییر سرعت بدهد



* جرم ها برابر برخورد کشسانی یک بعدی سرعت ها را با هم عوض می کنند

$P_i=P_f \longrightarrow m_2V_2+m_3V_3=m_2V_2'+m_3V_3'$ $\quad V_2'=0$, $V_3'=5$

$V_2=V_2'+V_3' \Rightarrow 5=V_2'+V_3'$

$K_i=K_f \Rightarrow \frac{1}{2}\times m_2\times V_2^2+\underbrace{\frac{1}{2}\times m_3V_3^2}_{0}=\frac{1}{2}m_2(V_2')^2+\frac{1}{2}m_3(V_3')^2$

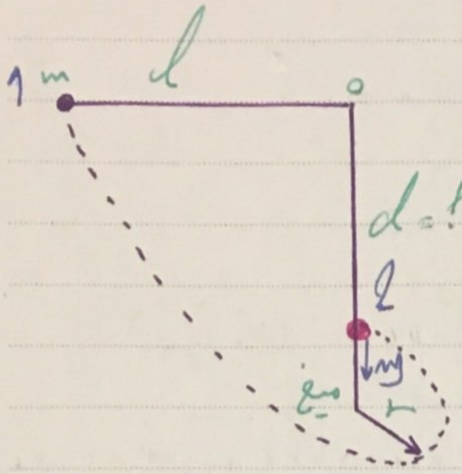
$V_2^2=(V_2')^2+(V_3')^2 \longrightarrow 25=(V_3'-5)^2+(V_3')^2 \Rightarrow V_3'=5$

* گلوله به جرم m به ریسمان سبکی به طول L وصل شده است آونگ را از حالت افقی رها می کنیم تا شروع به حرکت کند در نقطه A به فاصله d که از نقطه O میخ قرار دارد مقدار d حداقل باید چقدر باشد تا گلوله بتواند مسیر دایره ای اش را طی کند.

Scanned by CamScanner

endbook.net

حلقه ی گیلاک



هرچه که گلوله پایین از مدکز کمتر سرعت دقتی به بالای رسد

کمتر می شود پس حرکت کج می شود و دایره نمی شود و نیروی

وزن به سمت پایین می کشه

اگر گلوله بتواند خود را به بالا برساند در نقطه الطرف سرعت به بیشترین

مقدار خود می رسد

$T = 0 \rightarrow$ کمترین کشش $\rightarrow$ آ بیشترین $\rightarrow$ V بیشترین

$$F = ma \Rightarrow \overset{T=0}{T} + \cancel{m}g = \cancel{m}\left(\frac{v^2}{R}\right) \Rightarrow v^2 = Rg \Rightarrow v^2 = (l-d)g$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \longrightarrow mgl = \frac{1}{2}m(l-d)g + mg(l-d)$$

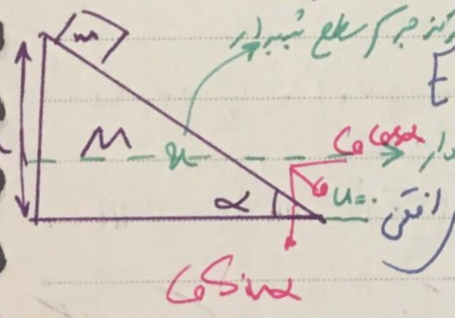
$$\Rightarrow l = \frac{1}{2}(l-d) + 2(l-d) \longrightarrow l = \frac{5}{2}(l-d)$$

$$L - d = \frac{2}{5}l \longrightarrow d = \frac{3}{5}l \longrightarrow 0.6\,l$$

* مکعبی به جرم m از بالای سطح شیب داری به جرم M و ارتفاع h از حال سکون شروع به حرکت

می کند سرعت مکعب و سرعت سطح شیب دار را هنگام رسیدن مکعب به پایین سطح شیب دار

نسبت آورید



$E_1 = E_2 \xleftarrow[\text{کل}]{\text{برای}}$ اصطکاک ندارد

اگر در راستای افق نیروی خارجی نداریم $\longleftarrow$ پس تکانه ی کل در راستای افق

ثابت است یا تغییر تکانه در راستای افق

$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ برای کل جرم مکعب جرم سطح شیب دار

با ۲ سبب اصل می شود

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

سرعت سطح شیب دار

x: $\frac{dP}{dt} = F_{ext} \sim \longrightarrow$ در راستای x نیروهای افقی نداریم $\longrightarrow P_x =$ ثابت $\longrightarrow P_i = P_f$

$\cos\alpha\, mg \neq Mg$ در راستای y داریم

$P_i = 0 + 0$

سطح شیب دار

P4PCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject: Year. Month. Date. ( )

در راستای حرکت شیء بین V' اعمال به راستای u در نظر گرفته شود

$$P_i = 0 + 0 = P_f = -Mu + m(V'\cos\theta - u)$$

$$\Rightarrow u(M+m) = mV'\cos\alpha \qquad V' = \frac{(m+M)u}{m\cos\alpha}$$

$V'\cos\alpha$ سرعت مکعب نسبت به سطح است و با کم کردن u سرعت واقعی بدست می‌آید

سرعت مکعب از دید ناظر ساکن $\leftarrow \vec{V} = \vec{V'} + \vec{u}$

سرعت مکعب نسبت به سطح شیب دار

سرعت سطح شیب دار

رابطه برداری است جهت ± 1 آن طبق محور حالت

$$V^2 = V'^2 + u^2 + 2V'u\cos(\pi - \alpha)$$

زاویه بین V' و u

$$\Rightarrow V^2 = V'^2 + u^2 - 2V'u\cos\alpha$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mV^2 \longrightarrow mgh = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}m(u^2 + V'^2 - 2V'u\cos\alpha)$$

$$mgh = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}mu^2\left(\frac{(m+M)^2}{m^2\cos^2\alpha} + 1 - 2\frac{(m+M)}{m\cos\alpha}\right)$$

$$mgh = u^2\left[\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}\frac{(m+M)^2}{m\cos^2\alpha} - \frac{m}{2} - (m+M)\right]$$

رابطه کلی

$$\vec{V} = \vec{V'} + \vec{u}$$

این رابطه برای شتاب نیز برقرار است

سرعت جسم از دید ناظر ساکن

سرعت مکعب نسبت به متحرک

سرعت ناظر متحرک

Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

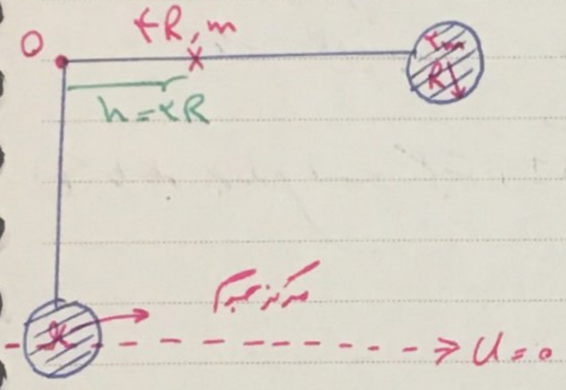
آونگی از یک میله به جرم m و طول ۴R و یک استوانه توپر به جرم ۲m و شعاع R

تشکیل شده است این آونگ را از حالت افقی رها می کنیم تا حول نقطه O دوران کند

از کلیه اصطکاک ها صرف نظر شود

الف) سرعت زاویه ای آونگ را هنگام عبور از وضع قائم بدست آورید

ب) سرعت خطی مرکز جرم استوانه را هنگام عبور از وضع قائم بدست آورید



استوانه توپر $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$

میله $I_{cm} = \frac{1}{12} m l^2$

حرکت دورانی ۲ تا I داریم یکی میله و یکی استوانه

$$E_1 = E_2 \longrightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

جرم استوانه

$$mg(5R) + 2mg(5R) = \frac{1}{2} I \omega^2 + mg\,3R$$

h=5R مرکز جرم استوانه تا محور دوران

$$12mgR = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\tfrac{1}{12} m(4R)^2}_{I_{cm}\ \text{میله}} + \underbrace{m(2R)^2}_{mh^2\ \text{میله}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(2m)R^2}_{I_{cm}\ \text{استوانه}} + \underbrace{2m(5R)^2}_{mh^2\ \text{استوانه}}\Big]\omega^2$$

I میله (قضیه محورهای موازی) حول O ← → I استوانه توپر حول O

$$12mgR = \frac{1}{2} mR^2 \left[\frac{4^2}{12} + 4 + 1 + 50\right]\omega^2$$

$$12g = \frac{R}{2}\left[\frac{149}{3}\right]\omega^2 \qquad \omega^2 = \frac{36}{149} \times \frac{2g}{R} \rightarrow \omega = \frac{6}{12}\sqrt{\frac{2g}{R}}$$

$$V = r\omega = 5R \times \frac{6}{12}\sqrt{\frac{2g}{R}}$$

اضافه کردن یک جسم با مرکز جرم معلوم به یک جسم که مرکز جرم آن نامعلوم باشد به طوری که

کل مرکز جرم آن معلوم باشد یکی از روش های حل های مرکز جرم است

Scanned by CamScanner

endbook.net

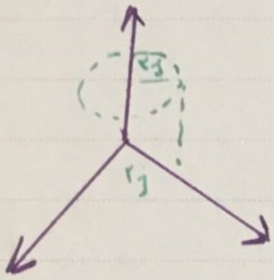
Subject:
Year. Month. Date. ( )

سرعت زاویه‌ای یک جسم صلب (ذره‌هایش نسبت به هم ثابت اند) که در حال دوران حول محور Z

می‌باشد با شتاب زاویه‌ای $3\ rad/s^2$ کاهش می‌یابد (حرکت کند می‌شود) یک ذره این جسم

صلب واقع در موقعیت $\vec{r} = 2\vec{j} + 1.5k$ را در نظر بگیرد در لحظه‌ای که $\omega = 15\vec{k}$

می‌باشد مطلوبست الف) سرعت خطی ذره ب) شتاب خطی ذره ج) شعاع مسیر دایره‌ای ذره



جهت ω ← ۴ انگشت در جهت چرخش ← انگشت شست به سمت بالا

الف) $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = 15k \times (2\vec{j} + 1.5\vec{k}) = 30(-i) + 1.5(\vec{k} \times \vec{k})$

$v = r\omega = 2 \times 15 = 30$

(شعاع)

$a_{\text{مرکزگرا}} = r\omega^2 = 2 \times 15 \times 15 = 450$

ب) مماسی

$a_{T\ \text{مماسی}} = 2\alpha = 2 \times 3 = 6 \xrightarrow[\text{می‌یابد}]{\text{کاهش}} \alpha = -3 \to a_{T\ \text{مماسی}} = -6\ m/s^2$

$a_{\text{مماسی}} = \vec{\alpha} \times \vec{r} = -3k \times (2j + 1.5k) = -6i = 6i\ m/s$

حرکت کند شونده $\longrightarrow \omega$ ، جهت α عکس $= -3\vec{k}$

$a_{\text{مرکزگرا}} \begin{cases} a_r = \vec{\omega} \times \vec{v} = 15\vec{k} \times (-30i) = -450j \\ a_r = r\omega^2 = 450\ m/s^2 \end{cases}$

$\vec{a}_{\text{شتاب خطی}} = \vec{a}_T + \vec{a}_r = 6i - 450j$ صلب

$a_{\text{شتاب خطی}} = \sqrt{a_T^2 + a_r^2} = \sqrt{36 + (450)^2}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حرکت صفحه دوار گرامافون که با سرعت زاویه ای ۷۸ دور بر دقیقه ($78 \frac{rev}{min}$) پس از خاموش شدن موتور آن کند می‌شود و صفحه بعد از ۳۰s می‌ایستد. الف) شتاب زاویه ای یکنواخت صفحه را پیدا کنید

ب) صفحه در این مدت چند دور چرخیده است؟

$\omega = 8 \times 78 \frac{rev}{min} \times \frac{2\pi rad}{60 s}$ → تبدیل به SI

$t = 30 s = \frac{1}{2} min$ $\qquad \omega = \alpha t + \omega_0$

$0 = \alpha(\frac{30}{60}) + 78$

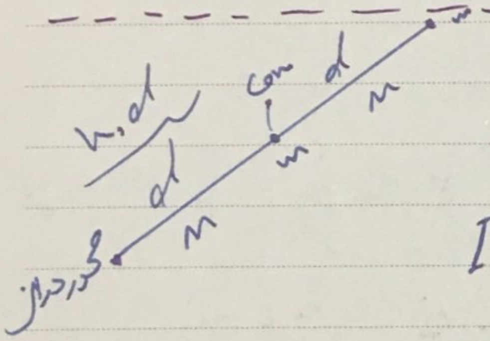
$\alpha = -156 \frac{rev}{min^2}$ الف)

تعداد دور $n = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$

اگر به $\frac{rad}{s}$ باشد $\Delta\theta$ تبدیل شود

$n = \Delta\theta = (\frac{\omega + \omega_0}{2})t = (\frac{78}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{78}{4} = 19.5$ ب) تعداد دور

به خاطر واحدها تبدیل نمی‌شود



$I = ?$ هر ۲ قطعه را یک میله بگیرید

$$I = md^2 + m(2d)^2 + \underbrace{\frac{1}{12} \times 2m(2d)^2}_{I_{cm}} + 2md^2$$

$$= 5md^2 + 2Md^2(\frac{1}{3} + 1) \Rightarrow \frac{1}{12}Md^2 + M(d/2)^2 + \frac{1}{12}Md^2 + M(\frac{3}{2}d)^2$$

۲ میله

سوال بالا: اینرسی دو میله ای نازک و همگن به جرم m و طول l را حول محوری بدست آورید که به ازای ابتدا میله عبور کرده و بر میله عمود است.

PAPCO

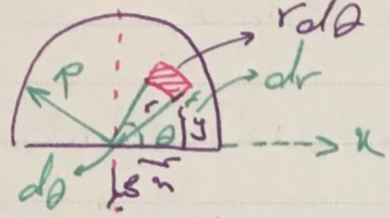
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

«جلسه‌ی پنجم»

* مرکز جرم یک ورقه‌ی نازک نیم دایره به شعاع R را به دست آورید که همگن است



$x_{com}=0$ $\quad dA = dr\, r d\theta$

$$y_{com} = \frac{\int y\, dm}{m} = \frac{\int r\sin\theta \frac{2m\, r dr d\theta}{\pi R^2}}{m} = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta$$

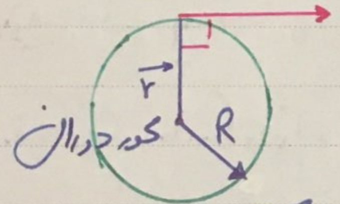
$$y_{com} = \frac{2}{\pi R^2}\left(\frac{R^3}{3}-0\right)\left(-\cos\pi-(-\cos 0)\right)$$

$$\| \; y_{com} = \frac{4R}{3\pi} \; \|$$

جرم	مساحت
m	$\frac{\pi r^2}{2}$
$dm = ?$	$r dr d\theta$

$$dm = \frac{2m\, r dr d\theta}{\pi r^2}$$

* به یک چرخ با اینرسی دورانی $I = 10^{-3}\, kgm^2$ نسبت به مرکز چرخ، شعاع 10cm یک نیروی مماسی برابر آن به صورت $F = 0{,}5t + 0{,}3t^2$ وارد شود چرخ ابتدا ساکن است مطلوب است شتاب زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای چرخ 3s پس از آغاز حرکت



حرکت تند شونده τ, ω, α ⊗

$\vec\tau = \vec r \times F$

$\tau = rF\sin\theta$

$\vec\tau = I\vec\alpha \to (0{,}5t + 0{,}3t^2)$

$RF\sin\theta = I\vec\alpha$

$\frac{1}{10}(1{,}5 + 2{,}7)\times 1 = 10^{-3}\alpha$

$\boxed{\alpha = 420\,\frac{rad}{s}}$ $\quad t = 3s$

$R(0{,}5t + 0{,}3t^2)\sin 90 = 10^{-3}\alpha$

$\Rightarrow \alpha = 50t + 30t^2 \to \omega = \int \alpha dt = \int (50t + 30t^2)dt$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \int d\omega = \int \alpha dt$

$\omega = 25t^2 + 10t^3 + C$

$t = 0 \to \omega = 0 + 0 + C \to C = 0$

$\omega = 25(3)^2 + 10(3)^3 = 225 + 270 \to \boxed{\omega = 495}$ $\quad t = 3s$

PAPCO

Scanned by CamScanner

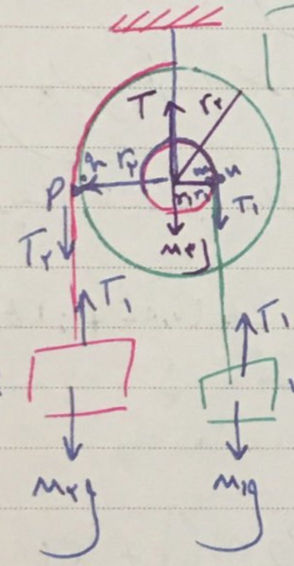
کار گشتاور در این نیرو را در ۲ ثانیه‌ی اول حرکت به‌دست آوریم.

$$W = \int \tau\, d\theta = \int R F \sin\theta = R\int_0^2 (10.5t + 0.3t^2)\, d\theta$$

$$= R\int_0^2 (10.5t + 0.3t^2)\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} dt \rightarrow R\int_0^2 (10.5t + 0.3t^2)(1.25t^3 + 10t)\, dt$$

$$= R\int_0^2 (112.5\, t^3 + 5t^4 + \dots)\, dt \quad \dots$$

* یک قرقره‌ی ثابت مطابق شکل از ۲ قرص همگن و هم مرکز به شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 تشکیل شده است. اگر اینرسی دورانی کل قرقره I_0 باشد شتاب زاویه‌ای یک قرقره و شتاب ۲ جسم m_1 و m_2 را به‌دست آوریم.



$r_2 = 2r_1$
$m_2 = 2m_1$

m_2: حرکت انتقالی $\Rightarrow F = ma \rightarrow r_2(m_2 g - T_2 = m_2 a_2)$ ، $a_2 = r_2\alpha$

m_1: ~ $\rightarrow$ ~ $\rightarrow r_1(T_1 - m_1 g = m_1 a_1)$ ، $a_1 = r_1\alpha$

حرکت دورانی در قرقره $\quad \tau = I\alpha = +T_2 r_2 \sin 90 - T_1 r_1 \sin 90 = I_0\alpha$

$V_p = V_q \rightarrow V_2 = r_2\omega \xrightarrow{\text{مشتق}} a_2 = r_2\alpha$

$V_m = V_n \rightarrow V_1 = r_1\omega \xrightarrow{\sim} a_1 = r_1\alpha$

$$\Rightarrow r_2 m_2 g - r_1 m_1 g = (m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2 + I_0)\alpha$$

$$\alpha = \frac{(\overset{2r_1}{r_2}\,\overset{2m_1}{m_2} - r_1 m_1)g}{m_1 r_1^2 + \underset{2m_1}{m_2}\,\underset{4r_1^2}{r_2^2} + I_0} \Rightarrow \alpha = \frac{3m_1 r_1 g}{8m_1 r_1^2 + I_0}$$

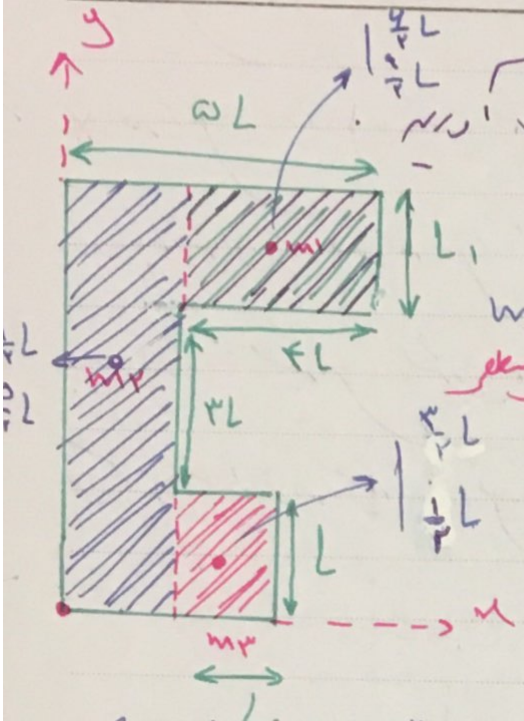
چون ω ← ⊙ است پس هر ⊙ مثبت است و ⊗ منفی

... با حرکت دورانی ... برابر است

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مرکز جرم قطعه سطح و همگن به شکل مقابل را بدست آورید.



$$x_{com} = \frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$$

$m = \sigma \times A$ چگالی سطحی

$A = 5L^2$

$$\frac{\cancel{\sigma}4\cancel{L^2}\times 3L + \cancel{\sigma}5\cancel{L^2}\times\frac{1}{2}L + \cancel{\sigma}\cancel{L^2}\frac{3}{2}L}{\cancel{\sigma}\times 10\cancel{L^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{12L+\frac{5}{2}L+\frac{3}{2}L}{10} = \frac{16L}{10} = \boxed{1.6L}$$

$A_1 = 4L^2$
$A_2 = 5L^2$
$A_3 = L^2$

$$y_{com} = \frac{\cancel{\sigma}4\cancel{L^2}\times\frac{9}{2}L + \cancel{\sigma}5\cancel{L^2}\times\frac{5}{2} + \cancel{\sigma}\cancel{L^2}\times\frac{1}{2}L}{10\cancel{\sigma}\cancel{L^2}}$$

$$\Rightarrow y_{com} = \frac{18L+\overbrace{\frac{25}{2}L+\frac{1}{2}L}^{13}}{10} = \frac{31L}{10} = \boxed{3.1L}$$

* جسمی به جرم 5kg با سرعت 10m/s در جهت مثبت محور x روی یک سطح افقی بدون اصطکاک در حرکت است که ناگهان در اثر انفجار به ۲ قطعه تقسیم می‌شود جرم قطعه اول 2kg و سرعت آن $\vec{v}_1 = 16\hat{i} + 12\hat{j}$ است سرعت قطعه دوم به جرم 3kg را برحسب بردارهای یکه بدست آورید (در این انفجار چقدر انرژی آزاد شده است)

قبل از انفجار $P = 50\hat{i}$

بعد $32\hat{i} + 24\hat{j} + P_2 \rightarrow 3(V_x\hat{i} + V_y\hat{j})$

$50\hat{i} = 32\hat{i} + 24\hat{j} + 3(V_x\hat{i} + V_y\hat{j}) \longrightarrow V_x\hat{i} + V_y\hat{j} = 6\hat{i} - 8\hat{j}$

انرژی قبل انفجار $K = \frac{1}{2}\times 5\times 10^2$

بعد انفجار $K_1 + K_2$

اختلاف انرژی آزاد شده

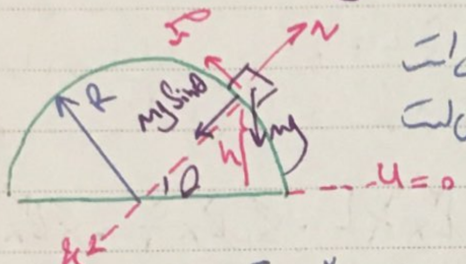
PAPCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

«جلسه ششم»

* در شکل مقابل یک نیم استوانه به شعاع R بر روی سطح افقی محکم شده است و در بالاترین نقطه ی آن یک حلقه به شعاع r و جرم m قرار دارد حلقه با سرعت ناچیزی شروع به غلتش یکنواخت «غلتش بدون لغزش» از روی نیم استوانه می کند حلقه در چه ارتفاعی برحسب R از نیم استوانه جدا می شود ($r \ll R$)



غلتش بدون لغزش است ← اصطکاک ایستایی است $\Rightarrow E_1 = E_2$

$\cancel{K_1} + U_1 = K_2 + U_2$

$\Rightarrow mgR = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 + mgh$ $\qquad F_n = m a_n$

$mgR = \frac{1}{2}(1mr^2)\omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 + mgR\sin\theta$ $\qquad mg\sin\theta - N = \frac{mv^2}{R}$

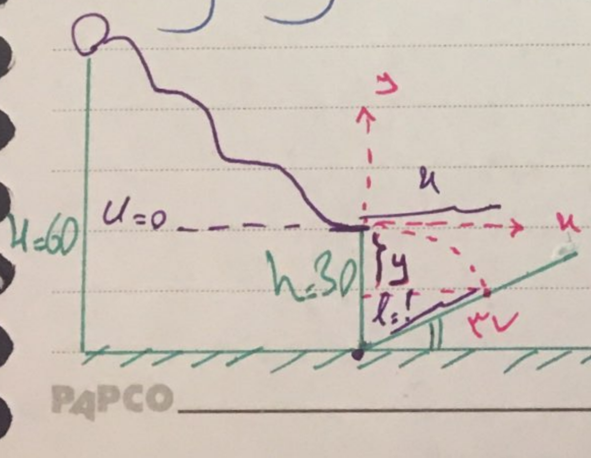
$\text{②}\ v_{com}^2 = Rg\sin\theta$

$Rg(1-\sin\theta) = \frac{1}{2} v_{com}^2 + \frac{1}{2} v_{com}^2 \quad \text{①}$

$\text{①,②} \rightarrow Rg(1-\sin\theta) = Rg\sin\theta \rightarrow 1 = 2\sin\theta \rightarrow \boxed{\theta = 30}$

* یک کره ی توخالی از بالای تپه ای از نقطه ی A شروع به لغزیدن بدون غلتش می کند و در نهایت به سطح شیب دار برخورد می کند این برخورد در چه طولی از سطح شیب دار رخ می دهد.

کره ی توخالی ← $I = \frac{2}{3} m r^2$



$E_1 = E_2$

$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

$mg(30) = \frac{1}{2} I_{com}\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{com}^2$

$30\cancel{m}g = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cancel{m}r^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\cancel{m} v_{com}^2$

$300 = \frac{1}{3} v_{com}^2 + \frac{1}{2} v_{com}^2 \rightarrow \frac{5}{6} v_{com}^2$

$v_{com} = 360$

PAPCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + \tan\theta\, x$$

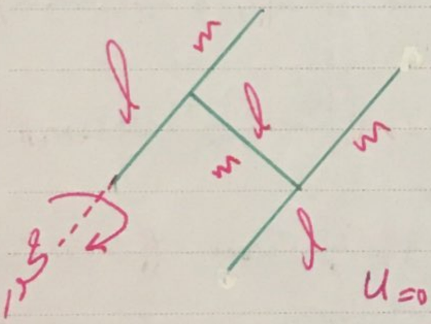
$$-(30 - l\sin 37) = \frac{-10\,(l\cos 37)^2}{2\times 360\times 1} \Rightarrow 30 + \frac{6}{10}l = \frac{-l^2\times 64\times 10^{-2}}{72}$$

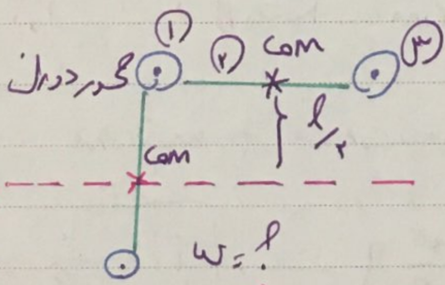
$$\frac{8}{900}l^2 + \frac{6}{10}l + 300 = 0 \longrightarrow 8l^2 + 540l - 27000 = 0$$

$$l = \frac{-540 \pm \sqrt{(540)^2 + 4\times 8\times 27000}}{16}$$

$$\Rightarrow l = \frac{-540 \pm \sqrt{27000\times 4\,[27+80]}}{16} = \frac{-540 \pm 20\times 3\sqrt{3\times 1.9}}{16}$$

* ۳ میله با طول ها و جرم های یکسان بشکل حرف H به یکدیگر متصل شده‌اند و محور دوران از یکی از میله های بالا، مجموعه را از حالت افقی رها می‌کنیم سرعت زاویه‌ای مجموعه را هنگام عبور از حالت قائم بدست آورید





$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$3mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{0}_{I_1} + \underbrace{ml^2}_{I_3} + \underbrace{\frac{1}{12}ml^2 + \frac{ml^2}{4}}_{I_2}\Big)\omega^2$$

$$\frac{3}{2}lg = \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}l^2\omega^2 \Rightarrow \frac{9g}{4l} = \omega^2 \longrightarrow \omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

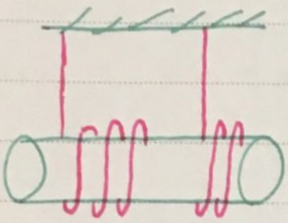
$$\Rightarrow \omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{10}{0.6}} = \frac{30}{2}\times\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

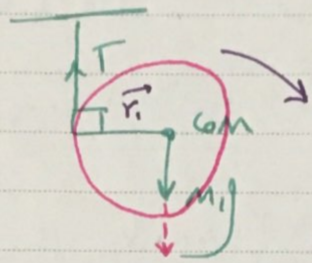
PAPCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* استوانه توپُر به طول l و جرم m و شعاع R مطابق شکل توسط ۲ ریسمان آویزان نگه داشته است در یک لحظه استوانه را رها می‌کنیم تا در اثر گرانش شروع به حرکت کند مطلوبست شتاب مرکز جرم استوانه هنگام پایین رفتن و کشش هر یک از ریسمان‌ها





حرکت انتقالی با دید مرکز جرم: $F = ma \longrightarrow mg - 2T = ma_{com}$ //1

حرکت دورانی حول محور مرکز جرم: $\tau = I\alpha \longrightarrow +TR\sin 90 + TR\sin 90 = (\frac{1}{2}mR^2)\alpha$

$2TR = \frac{1}{2}mR^2\alpha \longrightarrow T = \frac{1}{4}mR\alpha$ //2

$V_{com} = R\omega \longrightarrow a_{com} = R\alpha$ //3 $2,3 \rightarrow T = \frac{1}{4}ma_{com}$ //4

$1 + 2\times 4 \longrightarrow mg = ma_{com} + \frac{1}{2}ma_{com}$ $g = \frac{3}{2}a_{com}$ $a_{com} = \frac{2}{3}g$

$4 \rightarrow T = \frac{1}{\cancel{4}\,2} \times m \times \frac{2}{3}g \longrightarrow \boxed{T = \frac{1}{6}mg}$

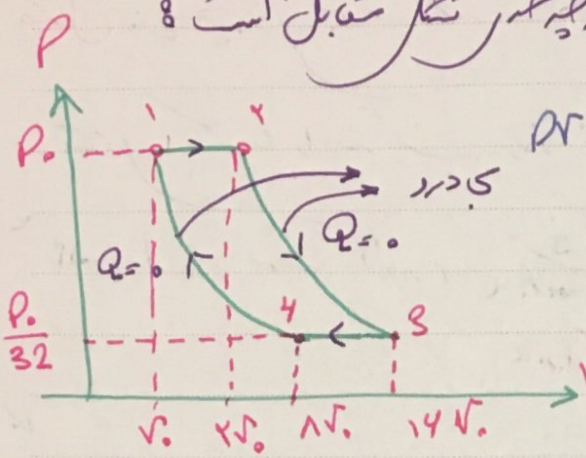
PAPCO

Scanned by CamScanner

endbook.net

||جلسه‌ی هفتم||

* یک مول گاز کامل ماده‌ی کار ماشین است که در چرخه‌ی شکل مقابل به کار رفته است:



الف) گاز تک اتمی یا ۲ اتمی یا چند اتمی است؟ $PV^\gamma =$ ثابت

ب) بازده‌ی ماشین چقدر است؟

ج) تغییر آنتروپی را در هر فرآیند بدست آورید؟

$Q_{12} = +Q_H = +nc_p\Delta T$, $Q_{34} = -Q_C = nc_p\Delta T$

$2 \xrightarrow[\text{بی‌دررو}]{} 3$ $\quad P_2V_2^\gamma = P_3V_3^\gamma \longrightarrow \cancel{P_0}(2V_0)^\gamma = \frac{\cancel{P_0}}{32}(16V_0)^\gamma$

$32 \times 2^\gamma \cancel{V_0^\gamma} = 16^\gamma \cancel{V_0^\gamma}$

$32 = \left(\frac{16}{2}\right)^\gamma \longrightarrow 2^5 = 2^{3\gamma} \longrightarrow \boxed{\gamma = \frac{5}{3}}$ تک اتمی

تغییر آنتروپی بی‌دررو $\Delta S = \int \frac{\cancel{dQ}}{T} = 0$

هم‌فشار $\Delta S_{34} = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{nc_p dT}{T} = nc_p \int \frac{dT}{T}$

ج) $\Delta S_{1\to 2} = nc_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 1 \times \frac{5}{2} R \ln 2$

$= \| 5 \ln 2 \ cal/K \|$

$\Delta S_{3\to 4} = 1 \times \frac{5}{2} R \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -5\ln 2 \ cal/K$

ب) $\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}$

$\eta = 1 - \frac{nc_p(T_3 - T_4)}{nc_p(T_2 - T_1)} \longrightarrow \eta = 1 - \frac{P_3V_3 - P_4V_4}{P_2V_2 - P_1V_1} = 1 - \frac{\frac{P_0}{32}(16V_0) - \frac{P_0}{32}(8V_0)}{P_0(2V_0) - P_0V_0}$

$\longrightarrow \eta = 1 - \frac{1/4}{1} = \boxed{\frac{3}{4}}$

PAPCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: پنجره‌ای به مساحت $2m^2$ به ضخامت 8mm را در نظر بگیرید و آهنگ انتقال گرما را در یک روز زمستانی که دمای داخل اتاق $27°$ و دمای بیرون $-13°$ است بدست آورید. $k = 1 \frac{J}{mol.k}$

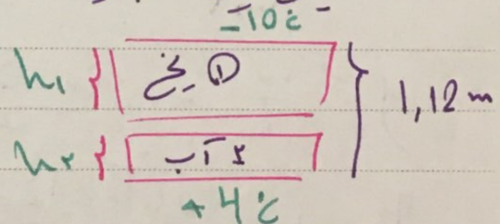
$$P = \frac{KA\Delta T}{l} = \frac{1 \times 2m^2 \times 40}{8 \div 1000} = 10000 \frac{J}{mol.s.k}$$

* اگر از یک شیشه ۲ جداره با ۲ شیشه ۴mm و هوا با ضخامت 8mm بین ۲ شیشه استفاده شود. آهنگ انتقال گرما به چه نسبتی کاهش می‌یابد

$$P = \frac{A\Delta T}{\sum_1^3 \frac{l_i}{k_i}} = \frac{2 \times 40}{\left(\frac{4}{1} + \frac{8}{25 \times 10^{-3}} + \frac{4}{1}\right)10^{-3}} = \frac{2 \times 40 \times 10^3}{4(1+80+1)} = \frac{2 \times 10^4}{82}$$

$$P = \frac{10^4}{41} \; J/s$$

* سطح یک آبگیر در زمستان یخ زده و دمای هوای بالای یخ -15 و دما در ته آبگیر $4°$ است و عمق آبگیر متشکل از یخ و آب 1,12m باشد در حالت پایا ضخامت یخ این آبگیر را حساب کنید (ضریب رسانش یخ و آب به ترتیب ۰٫۴ و ۰٫۱۲ می‌باشد $\frac{cal}{m.°c.s}$)



$k_{یخ} = 0.4 \frac{cal}{m.°c.s}$

$k_{آب} = 0.12$ "

$$P = P_1 = P_2 \longrightarrow \frac{k_1 \cancel{A}(10)}{h_1} = \frac{k_2 \cancel{A}(4)}{h_2}$$

$$\frac{0.4 \times 10}{h_1} = \frac{0.12 \times 4}{h_2} \longrightarrow \boxed{h_2 = 0.12 h_1}$$

$h_1 + h_2 = 1.12$ m

$\boxed{h_1 = 1m}$

$h_2 = 0.12m$

PAPCO
Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* یک قطعه یخ به جرم ۰٫۰۵ kg در دمای $-25^\circ C$ را داخل استخری پر از آب با دمای $27^\circ C$ می‌اندازیم. با فرض این که گرما فقط بین آب استخر و یخ مبادله می‌شود تغییر آنتروپی این سیستم را پس از برقراری تعادل گرمایی محاسبه کنید.

گرمای ویژه یخ $c = 2000 \ J/kg^\circ C$ $\qquad$ L_f آب $= 3276 \times 10^2 \ J/kg$

گرمای ویژه آب $c = 4000 \ J/kg^\circ C$ $\qquad$ [illegible]

یخ $-25^\circ C \xrightarrow{Q_1}$ یخ $0^\circ C \xrightarrow{Q_2}$ آب $0^\circ C \xrightarrow{Q_3}$ آب $27^\circ C$

$$Q_1 = mc\Delta T = \frac{5}{100} \times 2000 \times (0-(-25)) = 2500 \ J$$

$$Q_2 = mL_f = \frac{5}{100} \times 3276 \times 10^2 = 5 \times 3276 \ J$$

$$Q_3 = mc\Delta T = \frac{5}{100} \times 4000 \times (27-0) = 5400 \ J$$

$$\Delta S_{\text{یخ}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = \int_{1} \frac{dQ}{T} + \int_{2} \frac{dQ}{T} + \int_{3} \frac{dQ}{T}$$

$$= \int \frac{mc\,dT}{T} + \frac{Q_2}{T} + \int \frac{mc\,dT}{T}$$

$$= mc \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \frac{Q_2}{T} + mc \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

$$= \frac{5}{100} \times 2000 \ln\left(\frac{273}{273-25}\right) + \frac{5 \times 3276}{273} + \frac{5}{100} \times 4000 \times \ln\left(\frac{300}{273}\right)$$

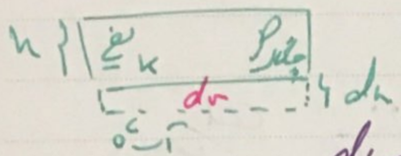
$$= 10 + \frac{5 \times 3276}{273} + 20 = 90 \ J/K$$

* برای ما فقط با دمای کلوین محاسبه می‌شود.

Scanned by CamScanner

endbook.net

* یک لایه یخ به ضخامت h بر روی سطح دریاچه‌ای ایجاد شده است
چگالی یخ ρ و L_f معلوم، آهنگ افزایش ضخامت را بدست آورید دمای هوای بالای یخ $-10^\circ C$ و رسانندگی k است



$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$Q = mL_f \qquad \frac{dQ}{dt} = \frac{KA(\Delta T)}{h}$$

$$\Rightarrow L_f \frac{dm}{dt} = \frac{KA\Delta T}{h} \Rightarrow L_f \rho \frac{dv}{dt} = \frac{KA\Delta T}{h}$$

$$\Rightarrow L_f \rho A \frac{dh}{dt} = \frac{KA\Delta T}{h} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{K\Delta T}{h\rho L_f}$$

* یک قطعه یخ به جرم 80gr را با دمای $-20^\circ C$ در یک لیوان عایق بندی شده
که حاوی 200gr آب $27^\circ C$ است می اندازیم مطلوبست دمای تعادل و تفسیر

$Q_1 = 80 \times \frac{1}{2} \times (+20) = 800\,cal$ نشستن آب یخ و مجموعه آب و یخ

80gr

یخ $-20^\circ C \xrightarrow[800]{Q_1}$ یخ $0^\circ C \xrightarrow[6400]{Q_2}$ آب $0^\circ C$

$Q_2 = mL_f = 80 \times 80 = 6400\,cal$

200gr

آب $27^\circ C \xrightarrow{Q}$ آب $0^\circ C$

$Q_3 = 200 \times 1 \times (0 - 27) = -5400\,cal$

$m' \times 80 = 4600$

$\rightarrow m' = 60gr$

57.5

$\theta = 0^\circ C$ $\quad 5400 - 800 = 4600$

سهم آب شدن یخ به آب $0^\circ C$

$C_{یخ} = 2100\,J/kgK = \frac{1}{2}\,\frac{cal}{gK}$ / $C_{آب} = 4200\,\frac{J}{kgK} = 1\,\frac{cal}{gK}$

L_f یخ $= 80\,cal/g$

L_f یخ $80 \times 4200\,J/kg$ $\qquad L_v = 540 \times 4200\,J/kg$

Scanned by CamScanner

endbook.net

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* وقتی مسیر تعادلی بیش از ۰° از ۰ تا θ و از -۲۷ تا θ حساب می‌شود و چ

ΣQ باید صفر باشد.

$$\Delta S_{\text{یخ}} = mc \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \frac{Q_2}{T}$$

$$= 80 \times \frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{273}{273-20}\right) + \frac{4600}{273} \quad cal/K$$

$$\Delta S_{\text{آب}} = mc \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = \frac{2}{10} \times 1 \times \ln\left(\frac{273}{300}\right) \quad cal/K$$

Scanned by CamScanner